

ATELIER

Descente de gradient



Atelier topographie et descente de gradient 2D

Activité développée pour le projet européen Erasmus+ AI Exhibits

Matériel :

- Cartes topographiques avec grilles superposées (Fichiers annexes “Carte1”, “Carte2”, “Carte3”, “Carte4”)
- Feuilles de réponses, une par carte (Fichiers annexes “Carte1_reponses”, “Carte2_reponses”, “Carte3_reponses”, “Carte4_reponses”)
- Grilles vides, une par carte (Fichiers annexes “Carte1_grille”, “Carte2_grille”, “Carte3_grille”, “Carte4_grille”)
- Stylos ou crayons

Durée : entre 60 et 90 minutes, en fonction de la familiarité des élèves avec la lecture des cartes topographiques

Déroulé de l'atelier

Les élèves sont divisés en paires ou petits groupes. Un élève (ou groupe) a devant lui une feuille vierge quadrillée, tandis qu'un autre a la carte topographique et la feuille de réponses. Pour le premier élève (ou groupe), c'est comme s'il avait face à lui une carte géographique dans laquelle toutes les informations sont perdues. Son objectif est de trouver le lieu d'altitude la plus basse sur la carte. Pour ce faire, il peut demander des informations sur chaque croisement de la grille, par la procédure suivante :

- Sélectionner un point de la grille (par exemple B4, correspondant au milieu de la case B4)
- Demander au deuxième élève (ou groupe) l'altitude du point choisi, ainsi que la pente locale (la direction de descente), par exemple nord-est, sud, sud-ouest, nord, etc. (8 possibilités) ; le deuxième élève (ou groupe) peut soit lire les informations dans la carte soit regarder la feuille de réponses
- Répéter les étapes précédentes jusqu'à ce que le premier élève (ou groupe) décide de s'arrêter et de donner son estimation sur quel est le point d'altitude plus basse
- Certaines zones des cartes sont grisées : ces zones sont à considérer inaccessibles et à ne pas explorer.

L'objectif est de trouver le point d'altitude la plus basse, sans parcourir toute la carte. C'est aux élèves de trouver le moment judicieux pour s'arrêter, un équilibre entre temps passé et exactitude de la réponse.

Dès que tous les élèves (ou groupes) se sont arrêtés, l'intégralité de la carte est révélée. Sur la carte sont montrés les minimums locaux pour que les élèves puissent vérifier leurs estimations.

L'activité peut ensuite être répétée avec une différente carte et en échangeant les rôles entre élèves (ceux qui avaient les grilles prennent les cartes et vice-versa).

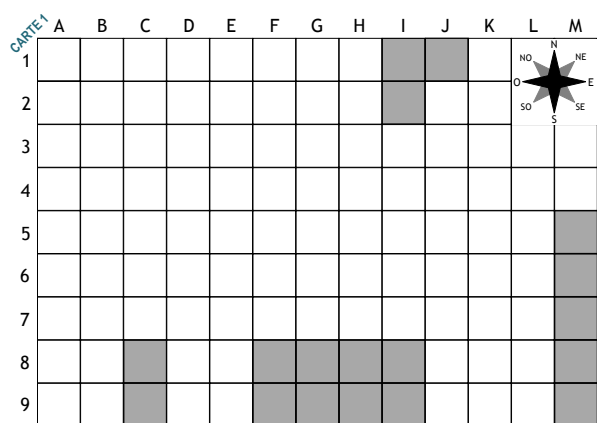


Figure 1. Exemple de grille vierge. Les cases grises sont des régions inaccessibles.

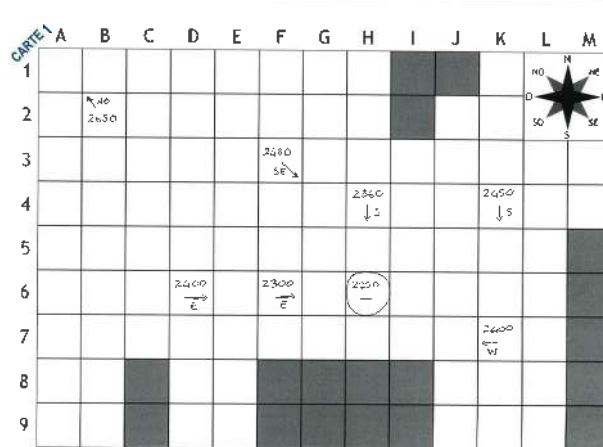


Figure 2. Exemple de grille résolue avec estimation de la case avec la plus basse altitude.



Résumé des points principaux d'explication de l'atelier

La meilleure manière de trouver le point de plus basse altitude sur une carte est de mesurer altitude et direction de descente à des endroits choisis au hasard, puis utiliser la direction de la pente comme indice pour trouver des points à plus basse altitude, ensuite répéter la procédure jusqu'à atteindre le minimum. Cette procédure est un **algorithme** appelé **descente de gradient**. En général, la descente de gradient permet de localiser le minimum d'une fonction dont l'expression analytique n'est pas connue. La procédure peut être résumée comme suit :

- Commencer en mesurant l'altitude et la direction de la pente en un point choisi au hasard
- Suivre la direction de descente plus rapide depuis ce point, afin de choisir un deuxième point
- Suivre la pente à partir du deuxième point afin de trouver un troisième point
- Répéter la procédure jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible de trouver une altitude plus basse.

Il est aussi possible d'aller dans le sens de pente montante, ce qui amène à trouver les points d'altitude maximale : dans ce cas, on parle de montée de gradient.

Le concept mathématique de **gradient** formalise la notion intuitive de pente. Le gradient est un vecteur : sa longueur est proportionnelle à la pente locale, qui est le rapport entre la différence d'altitude et le déplacement horizontal à partir d'un certain point ; sa direction est celle de la pente ascendante ou descendante la plus raide .

La descente de gradient est une technique très importante **en apprentissage automatique (Machine Learning)**, car elle permet aux machines d'apprendre à réaliser des tâches. La manière dont l'entraînement fonctionne est similaire à celle d'un élève : on utilise des données d'entraînement, comme des exercices pour lesquels on connaît déjà la réponse, on corrige ses erreurs, puis on recommence, jusqu'à ce qu'on devienne suffisamment performant à l'entraînement pour appliquer son apprentissage à de nouveaux exercices. La performance est mesurée par le nombre d'erreurs : moins la machine commet des erreurs, mieux elle effectue la tâche. Mathématiquement, entraîner une machine se traduit donc en **la minimisation d'une fonction d'erreur**. La descente de gradient permet de trouver l'ensemble de paramètres qui minimisent la fonction d'erreur, permettant à la machine de performer au mieux.

Prenons l'exemple d'une tâche très simple (voir figure ci-dessous) : des points rouges et bleus sont disposés le long d'une ligne et la tâche consiste à les séparer, avec tous les points rouges d'un côté et tous les bleus de l'autre. Pour un humain il s'agit d'une tâche facile, mais une machine ne possède pas les capacités de reconnaissance visuelle d'un humain. Pour trouver le bon endroit où placer la barrière, la machine choisit une position au hasard et ensuite se corrige en essayant à minimiser le nombre d'erreurs. Ici, la fonction d'erreur représente le nombre de points qui ont été placés dans le mauvais camp, à savoir des points rouges placés

dans le camp bleu et des points bleus placés dans le camp rouge, en fonction de la position de la barrière sur la ligne. Comme la fonction d'erreur dépend d'un seul paramètre, elle est uni-dimensionnelle. En suivant la pente de cette fonction d'erreur très simple, il est possible de trouver le bon emplacement pour la barrière.

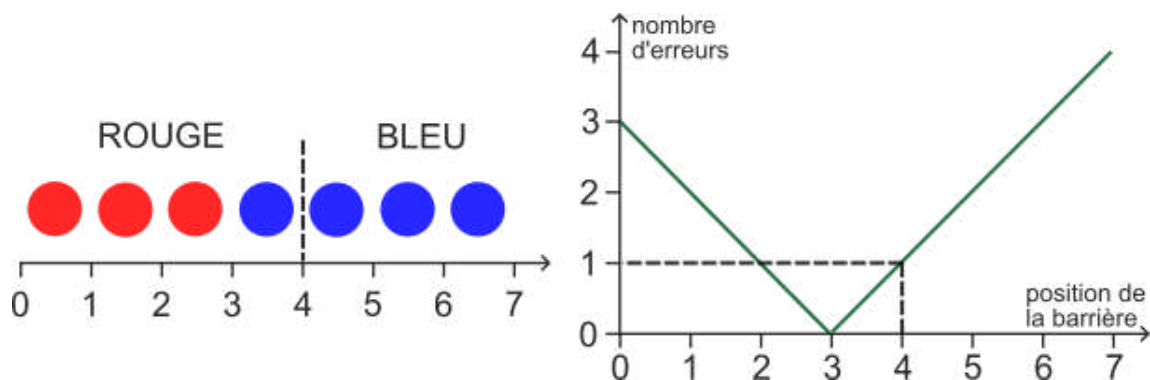


Figure 3. Gauche : points rouges et bleus le long d'une ligne. Le pointillé marque l'endroit où la machine a placé la barrière entre le camp bleu et le camp rouge. Droite : fonction d'erreur associée au problème : nombre d'erreurs en fonction de la position de la barrière.

Un autre exemple peut être celui d'un algorithme de classification, qui chercherait à classer des photos et dire s'il s'agit de photos de chien ou de photos de chat. La fonction d'erreur peut représenter le nombre de fois où il se trompe, c'est-à-dire où il identifie un chat à la place d'un chien ou inversement, un chien au lieu d'un chat. À chaque étape de l'entraînement, on présente au modèle des images de chiens et de chats et on regarde combien d'erreurs il fait. Le nombre d'erreurs sera différent à chaque itération, mais la descente de gradient va « guider » le modèle vers le résultat qui présente le nombre minimum d'erreurs. La procédure est répétée jusqu'à ce que la performance du modèle soit considérée satisfaisante. Plus la tâche est complexe, plus la fonction d'erreur l'est aussi.

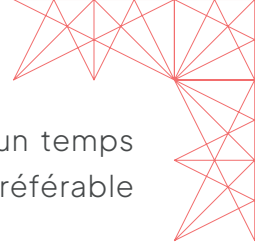
Si le modèle comporte deux paramètres, la fonction d'erreur peut se tracer comme une **surface en deux dimensions**, où les coordonnées horizontales représentent les valeurs des deux paramètres et l'altitude le nombre d'erreurs. On peut représenter une telle surface par une carte topographique, sur laquelle on cherche le minimum.

L'atelier simule donc la recherche de minimum en 2D via la recherche d'un de l'altitude plus basse sur une carte. Le minimum d'altitude correspond ainsi au minimum de la fonction d'erreur.

Comme doit le faire un modèle d'IA, les élèves vont procéder par essais-erreurs : choisir un point, demander son altitude et le sens de la pente, puis utiliser ces informations pour décider vers quel autre point aller chercher les mêmes informations.

Les élèves auront remarqué les difficultés suivantes :

- Un minimum est toujours **local** ; il faudrait connaître l'intégralité de la carte pour être sûr qu'il s'agit du minimum absolu



- Parcourir toute la carte pour être sûr de trouver le minimum absolu demande un temps maximal, ce qui n'est pas toujours possible ; en fonction de la situation, il peut être préférable de se contenter d'un minimum relatif
- Il est toutefois très difficile de connaître la qualité de ce minimum relatif car on ne sait pas à quel point le minimum absolu est meilleur
- Choisir la longueur du pas entre deux itérations n'est pas évident
- Choisir vers quelle direction se déplacer n'est pas évident, mais le meilleur choix est de suivre la pente.

Plusieurs cartes sont fournies afin de présenter des scénarios différents, chacun avec sa stratégie optimale :

- Un bassin simple (Carte1 et Carte2), pour montrer qu'il faut suivre la pente
- Une carte avec plusieurs minima (Carte3), pour montrer qu'il faut d'abord adopter un pas assez long pour trouver la zone plus prometteuse, puis réduire le pas pour chercher le meilleur point dans cette zone
- Une carte avec une bosse au milieu d'une descente, pour montrer que parfois la règle de suivre la pente peut ne pas être suivie rigoureusement (Carte4)

Informations pratiques pour l'animation de l'atelier

Impression des cartes et des grilles

Les cartes topographiques et les grilles vierges sont optimisées pour l'impression au format A4. Les cartes peuvent être imprimées en couleurs ou en noir et blanc.

Comment lire une carte topographique

Une carte topographique est caractérisée par la présence de **courbes de niveau** (ou **isoplèthes d'altitude**) : ce sont des courbes qui connectent les points ayant la même altitude. Dans les cartes fournies pour cet atelier, les isoplèthes plus foncées connectent des points dont l'altitude est un multiple de 100 m ou 50 m. L'altitude est soit écrite à côté de la courbe, soit elle peut être déduite à partir des courbes voisines. Les isoplèthes plus claires sont placées à des intervalles de 20 m ou 10 m en altitude, de sorte qu'il y a toujours 4 courbes claires entre 2 courbes foncées. Pour connaître l'altitude d'une courbe claire, il faut se référer à la courbe foncée la plus proche.

Pour les élèves chargés de lire les cartes, l'altitude correspondante à une case de la grille peut être déterminée en localisant le centre (approximatif) de la case, en cherchant la courbe de niveau la plus proche et en lisant l'altitude correspondante à cette courbe de niveau. En cas de doute, la feuille de réponses peut être consultée.

Plus deux isoplèthes sont proches, plus la pente est raide à cet endroit. Ceci est formalisé mathématiquement par le **gradient**, qui est un vecteur et est donc représenté comme un segment orienté. Pour un point donné de la carte, le gradient pointe vers la direction où la pente est plus raide (donc il croise les isoplèthes avec un angle droit) ; sa longueur est proportionnelle à la **pente**, définie comme le rapport entre le changement en altitude et le déplacement horizontal.

Dans le cadre de cet atelier, les élèves doivent déterminer uniquement la direction du gradient pour chaque case de la grille. Pour ce faire, une fois localisé le centre d'une case, ils doivent identifier la direction où la descente est plus raide : ceci correspond à la direction vers laquelle on croise le plus grand nombre de lignes de contour. Le gradient peut pointer vers n'importe laquelle des infinies directions qui existent dans le plan. Pour simplifier, cependant, les élèves ne pourront choisir que parmi 8 directions (nord, sud, est, ouest, nord-ouest, sud-ouest, sud-est, nord-est), ce qui veut dire que parfois il faudra approximer. Une légende des directions est présente dans chaque carte, grille vierge et feuille de réponses. En cas de doute, la feuille de réponse peut être consultée.

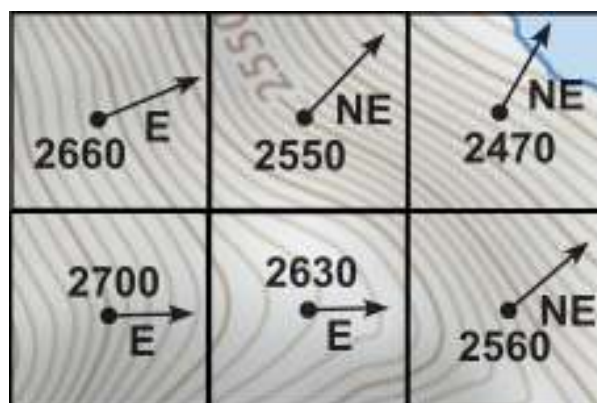


Figure 4. Exemples d'identification de l'altitude (en mètres) et direction de gradient dans différentes cases d'une grille.



Concepts mathématiques pour aller plus loin

Comme expliqué plus haut, l'exercice consiste à chercher une altitude minimale, ce qui imite la recherche d'un minimum d'une fonction d'erreur dans le contexte de l'apprentissage automatique.

Un algorithme d'apprentissage automatique cherche à maximiser les résultats dans un exercice, ce qui veut dire minimiser le nombre d'erreurs. Donc, essentiellement, on cherche l'ensemble de paramètres qui minimisent les erreurs : la fonction d'erreur, ou fonction de perte.

La manière de procéder consiste à commencer en un point choisi au hasard, tester le modèle sur les données d'entraînement, puis suivre la pente de la fonction d'erreur.

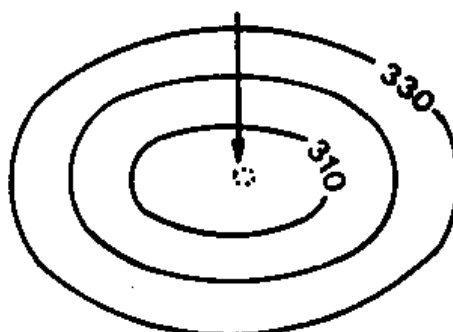
D'abord, pourquoi doit-on suivre la pente ? Pourquoi ne pas explorer dans toutes les directions ?

Ceci est à cause du grand nombre de dimensions : on peut explorer dans 2 directions en 1 dimension, 8 directions en 2 dimensions (N, S, E, O, NO, NE, SE, SO), 26 en 3 dimensions, $3^n - 1$ en dimension n , où n représente le nombre de paramètres du modèle. Cela prendrait donc trop de temps d'explorer dans toutes les directions. En pratique, la situation est encore plus complexe, car il y a un nombre infini de directions à partir de la dimension 2 (où on pourrait aller en direction ENE, SSO, ...).

Plus l'espace à explorer est large, plus il y a des cases à explorer et donc plus de temps nécessaire à l'exploration. Aussi, contrairement aux cartes utilisées dans cet atelier qui ont des bords définis, une fonction d'erreur n'est en général pas bornée, donc l'espace à explorer est infini : une règle est donc nécessaire pour décider vers quelle direction procéder dans l'exploration.

C'est pour cette raison qu'il faut suivre la pente, car elle conduit nécessairement vers un minimum : si on suit la pente, on descend.

Par exemple, dans un bassin (voir figure ci-dessous), suivre la pente conduit vers le minimum.

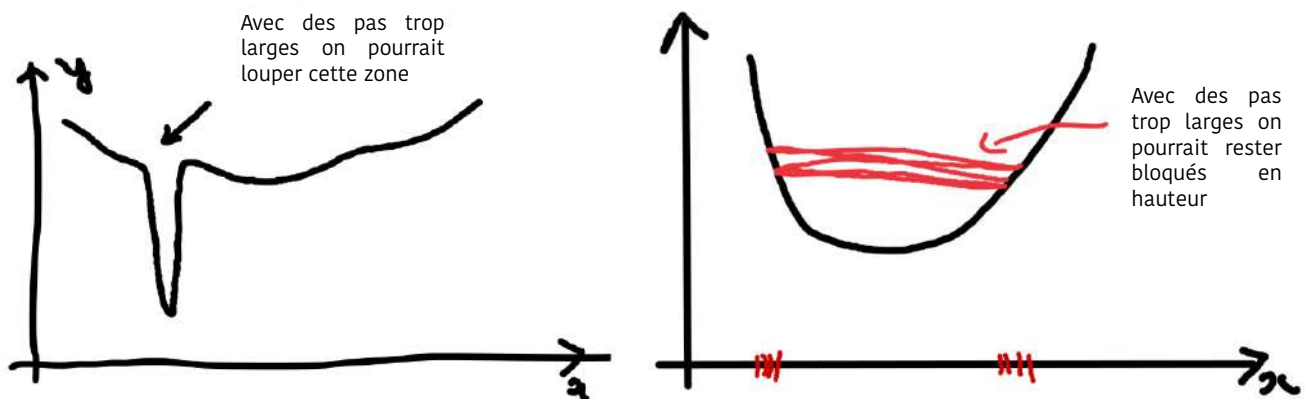


Quelle est la meilleure longueur de pas à choisir pour trouver le minimum ?

Une fois qu'on sait vers quelle direction aller, il existe plusieurs stratégies possibles pour trouver le minimum.

1) On peut parcourir la carte à grands pas, ce qui veut dire choisir des points éloignés les uns des autres. Ce faisant, on peut se faire une idée générale de la carte mais on ne fait pas attention aux détails.

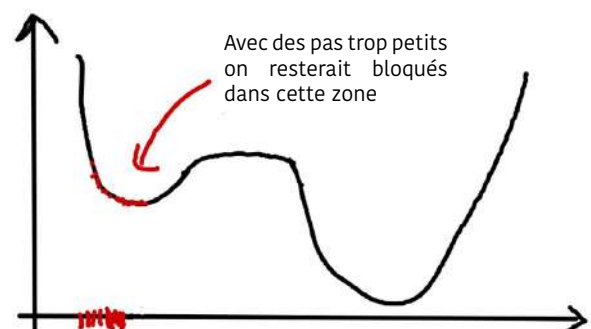
2) On peut sinon parcourir la carte avec des petits pas, pour être plus précis.



Problèmes avec la stratégie 1)

- a) On pourrait passer par-dessus une zone intéressante (comme dans l'exemple du panneau de gauche de la figure ci-dessus, où x est la position horizontale et y l'altitude)
- b) On pourrait ne pas réussir à trouver le meilleur point dans une zone (figure ci-dessus à droite).

Problèmes avec la stratégie 2)



- a) Elle demande beaucoup de temps : on explore la presque totalité de la carte case par case
- b) On pourrait rester coincé dans une région de minimum local alors que le minimum absolu est dans une autre région (vois figure ci-dessus).



Le choix de la largeur du pas reflète l'une de deux manières possibles de raisonner :

- Pas large : chercher une zone prometteuse en considérant que l'estimation est suffisamment précise
- Pas petit : choisir une zone et rechercher le meilleur point dans cette zone.

Adapter la taille du pas

Comme expliqué plus haut, le choix de la largeur du pas est crucial. Intuitivement, la meilleure stratégie consisterait à commencer par des larges pas, trouver la zone plus intéressante, puis procéder par pas plus petits afin de trouver le point plus intéressant dans cette zone.

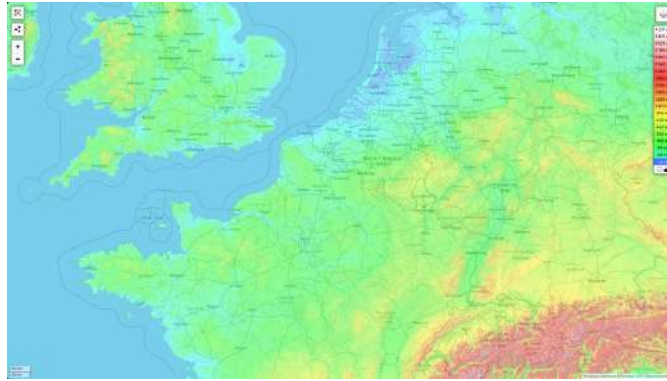
Pour ce faire, il est possible d'adapter la taille du pas à chaque itération, en fonction de combien les paramètres du modèle d'apprentissage automatique ont changé par rapport à l'itération précédente. Si les paramètres ont beaucoup changé au cours de l'entraînement, cela veut dire qu'on est proche des paramètres optimaux et on peut donc diminuer la largeur du pas : cette stratégie est appelée **ADAggrad**, de « adaptive gradient » ou « gradient adaptatif ». Le souci est que cette stratégie permet seulement de diminuer le pas et non de le réaugmenter, alors qu'il pourrait arriver de tomber sur une nouvelle zone qu'on voudrait pouvoir explorer rapidement. Dans ce cas, **RMS prop** (« Root Mean Square propagation » ou « propagation de la moyenne quadratique ») est une stratégie développée plus récemment qui permet d'augmenter, et non seulement de diminuer, la largeur du pas.

Il pourrait y avoir d'autres inconvénients. Prenons l'exemple d'une petite bosse située au milieu d'une descente : si on suivait les règles de la descente de gradient, on descendrait le long de la pente jusqu'à rencontrer la bosse, mais la pente locale nous enverrait ensuite dans la mauvaise direction. Est-ce qu'il serait possible de passer par-dessus les petites bosses pour descendre dans la bonne direction ?

Une solution pourrait être de faire de pas suffisamment larges pour passer au-dessus de la bosse, mais cela ferait perdre en précision.

Comme exemple, regardons une carte de l'Europe. Les Pays-Bas sont le pays plus bas en altitude et c'est là que se situe le minimum de la carte. Si on commence par un point en France et que l'on suit la pente, cela nous ferait diriger vers les Pays-Bas. Cependant, on pourrait tomber sur un relief le long du chemin, où la pente locale nous indiquerait de repartir en arrière, nous éloignant du minimum recherché.

La stratégie optimale peut donc être la suivante : si sur une certaine distance, par exemple 400 km, on n'a fait que descendre, ceci est une indication qu'on avance dans la bonne direction. Ainsi, même si on rencontre une bosse, on continue dans la même direction. Cette stratégie s'appuie sur la notion d'**inertie**. Si on fait rouler une bille depuis une haute altitude et que la bille parcourt une certaine distance avant de rencontrer une petite bosse, l'impulsion qu'elle a accumulée lui permet de passer par-dessus la bosse et de poursuivre la descente.



Actuellement, la stratégie plus largement utilisée dans la descente de gradient consiste donc à adapter la largeur du pas en fonction des itérations précédentes et à utiliser la notion d'inertie pour passer par-dessus les petits obstacles. Le nom de cette stratégie est ADAM (« adaptive moment estimation » ou « estimation adaptative du pas »).

Remarques conclusives :

Il peut suffire de trouver un minimum local

En général, une carte peut être très large et même infinie : il est donc impossible de la parcourir dans son entièreté, peu importe la largeur du pas ; le but est alors de trouver au moins un minimum local. Dans l'exemple de la carte de l'Europe, ceci correspondrait par exemple à identifier le minimum de la région Ile-de-France au lieu de celui de la France entière. Ceci est acceptable si on considère que le paysage (ou la **topologie**, pour utiliser le terme mathématique) de l'Ile-de-France est représentatif de celui de la France entière : le minimum d'altitude de la région Ile-de-France est alors proche du minimum absolu de la carte de France.

Ce principe s'applique couramment en apprentissage automatique et fournit des bons résultats.

Entraînement sur la totalité des données

On pourrait dire qu'entraîner un algorithme d'apprentissage automatique est comme former un élève : il résout des exercices, reçoit des corrections et ensuite corrige son raisonnement pour améliorer ses résultats. L'amélioration après correction correspond à la descente de gradient. Sauf qu'il n'est pas possible de calculer le gradient de toutes les données d'entraînement au même moment, tout comme un humain ne peut pas se souvenir de la correction de chaque exercice dans un manuel ; le gradient n'est donc pas complètement « vrai », car il n'est pas basé sur l'intégralité des données d'entraînement. Les chercheurs et chercheuses ont trouvé des techniques pour découper les données d'entraînement en morceaux sur lesquels les IA peuvent apprendre plus facilement. Ceci est équivalent à apprendre de nouveaux exercices après avoir déjà étudié, on ne veut pas effacer les connaissances précédentes.



Gérer les erreurs dans les données d'entraînement

Il peut y avoir des erreurs dans les données d'entraînement : par exemple du biais, des exemples sous-représentés, ou des données fausses. Prenons à nouveau l'exemple d'un modèle qui distingue entre images de chiens et de chats. S'il y a seulement des images de chiens dans les données d'entraînement, le modèle dira toujours « chien » et aura des bonnes performances dans l'entraînement, mais ne sera jamais capable d'identifier un chat. Si certaines données sont fausses – par exemple, une image de chat étiquetée comme « chien » – il ne sera pas capable d'apprendre correctement. Souvent, le défi majeur est d'avoir un bon ensemble de données d'entraînement plutôt qu'un bon algorithme, surtout lorsqu'on a besoin de larges bases de données ou quand, par exemple avec les données médicales, il est difficile de les étiqueter correctement.

CARTE 1

A B C D E F G H I J K L M

1

2

3

4

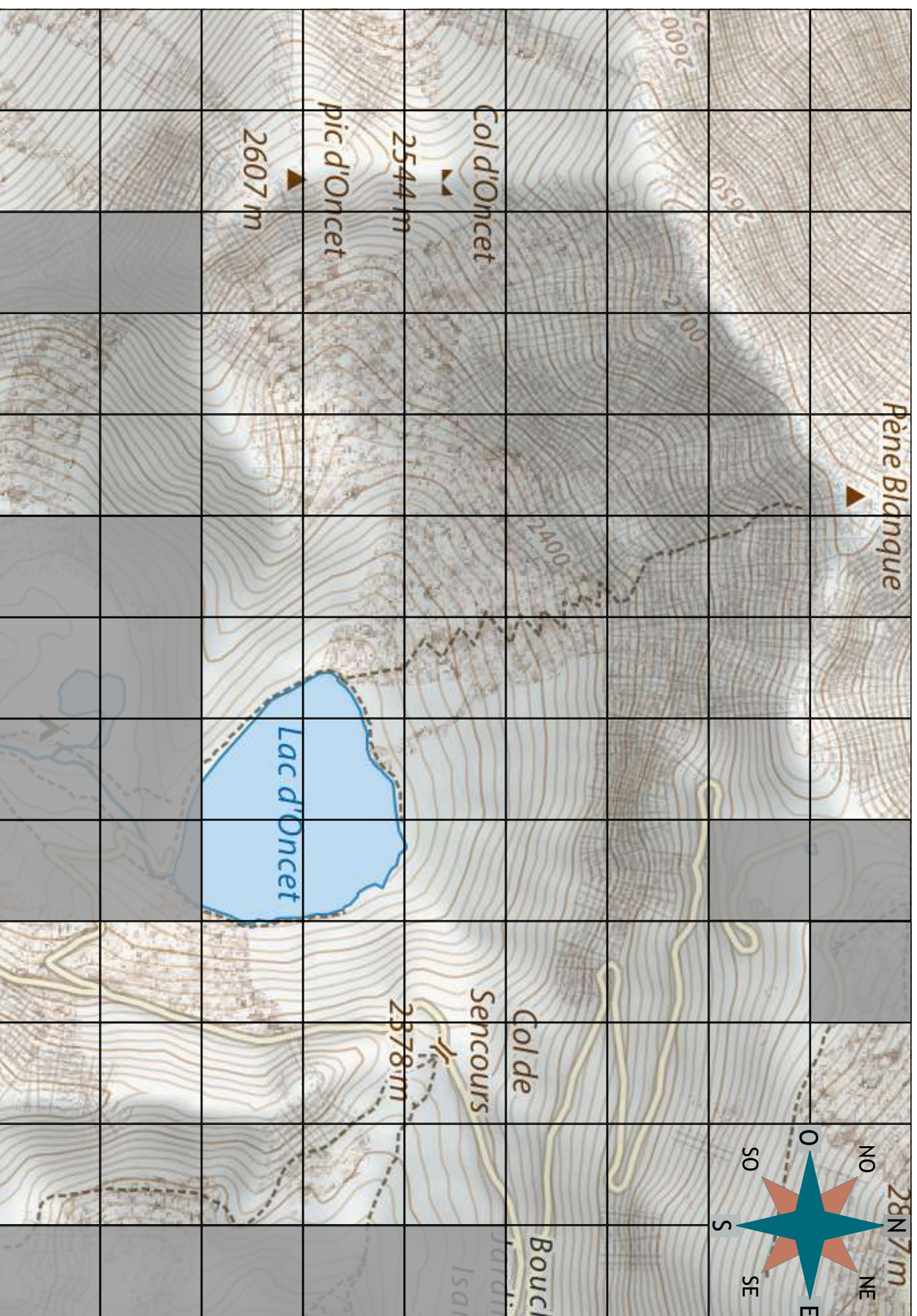
5

6

7

8

9

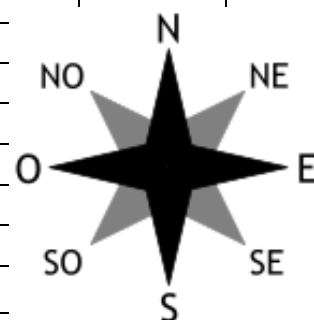


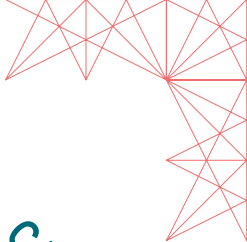


Atelier Descente de gradient

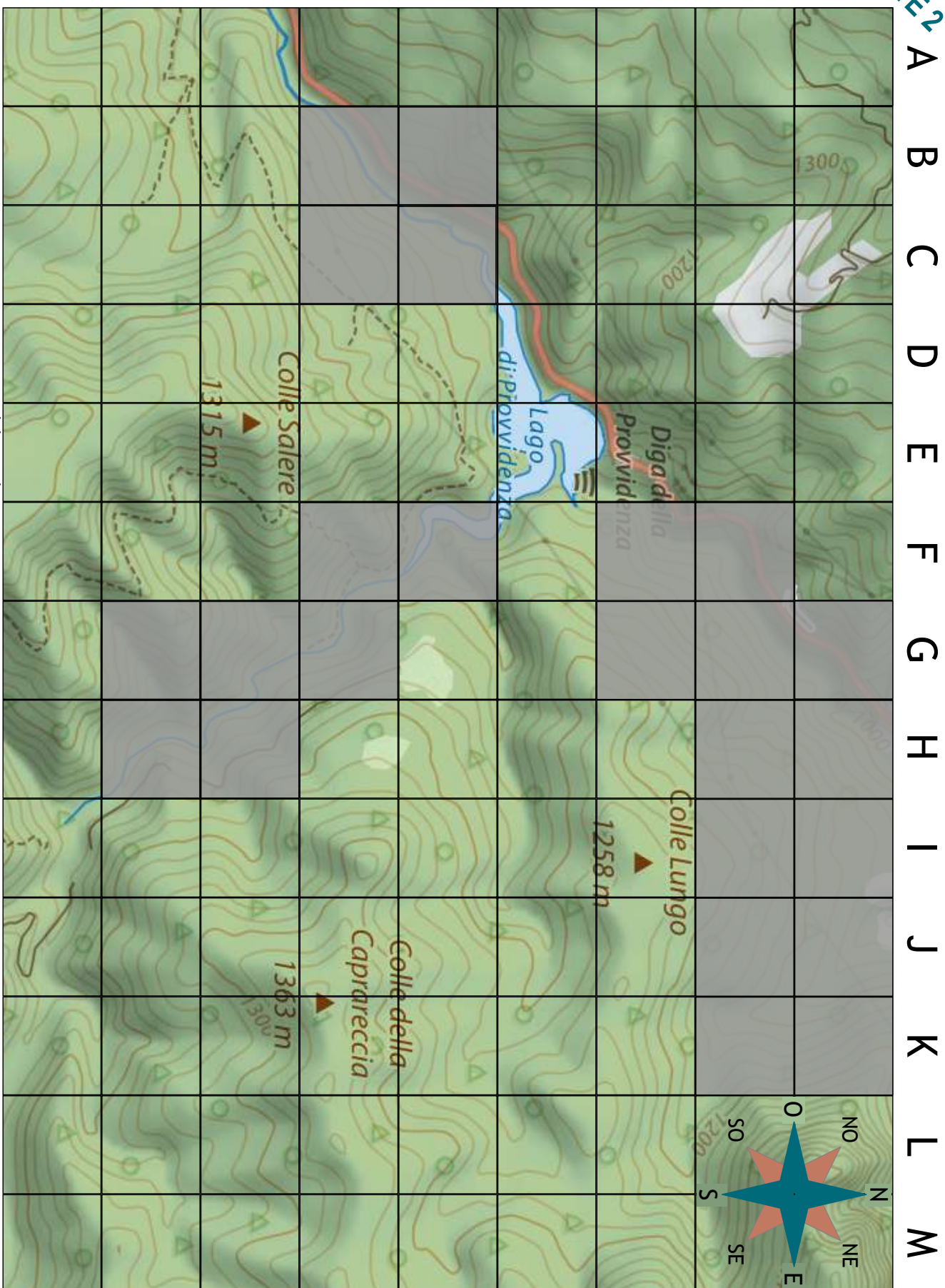
Carte 1 : fiche réponses

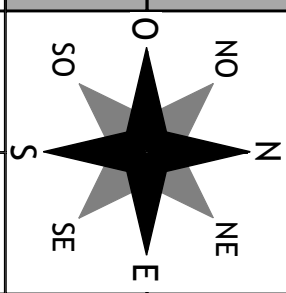
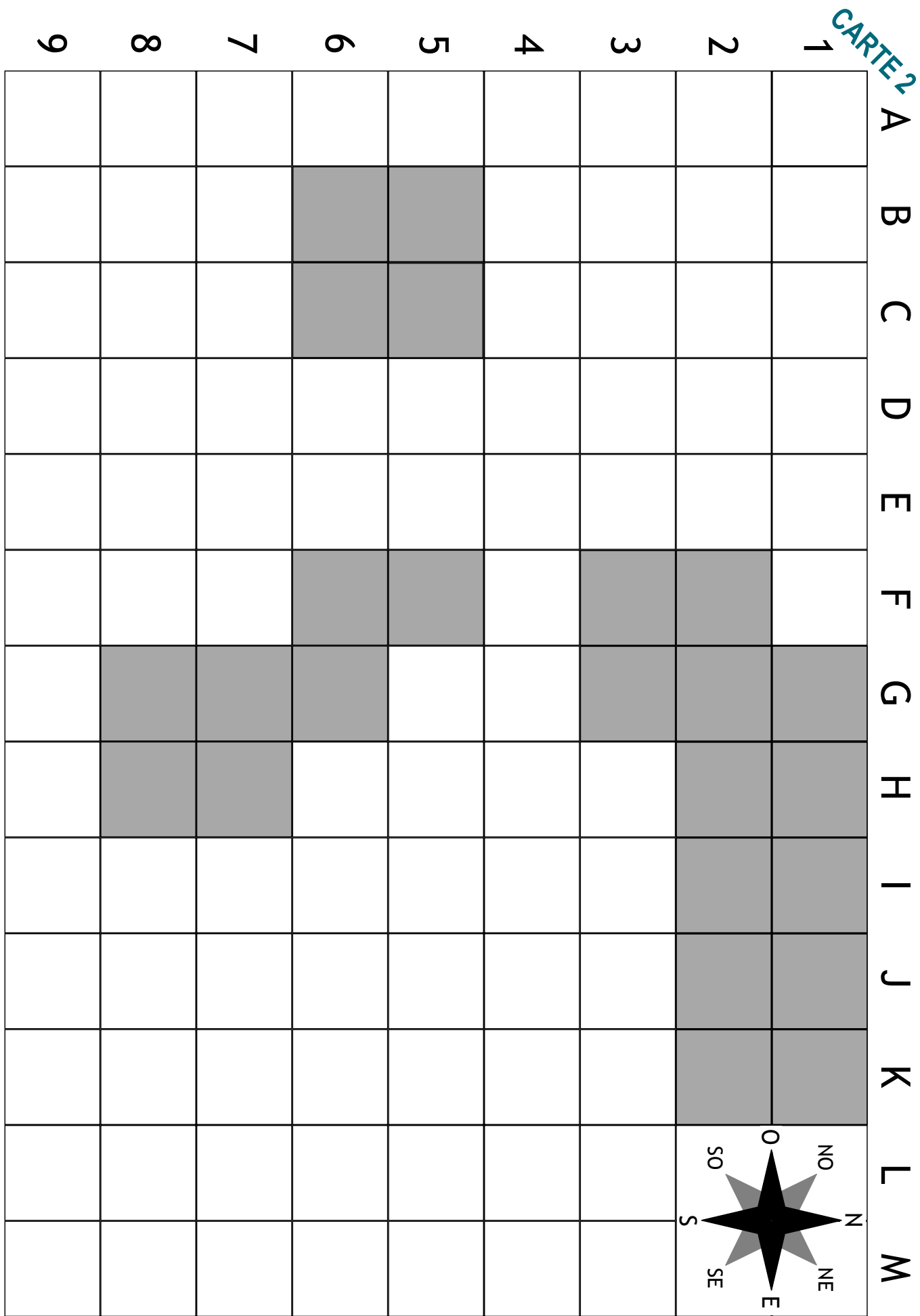
Point	Altitude	Gradient	Point	Altitude	Gradient	Point	Altitude	Gradient
A1	2300	NO	F1	2690	NE	K1	2710	SO
A2	2450	NO	F2	2600	S	K2	2640	S
A3	2630	NO	F3	2480	SE	K3	2530	S
A4	2560	SO	F4	2380	SE	K4	2450	S
A5	2480	SO	F5	2320	SE	K5	2380	SE
A6	2480	NO	F6	2300	E	K6	2400	NE
A7	2490	SO	F7	2340	SE	K7	2400	O
A8	2380	SO	F8	//////	//////	K8	2420	O
A9	2300	SO	F9	//////	//////	K9	2430	NO
B1	2410	NO	G1	2620	N	L3	2560	S
B2	2570	NO	G2	2620	S	L4	2450	S
B3	2680	O	G3	2480	S	L5	2370	SE
B4	2610	SO	G4	2360	S	L6	2350	E
B5	2540	O	G5	2300	SE	L7	2380	SE
B6	2570	E	G6	2260	SE	L8	2360	E
B7	2570	SO	G7	2280	NE	L9	2380	NE
B8	2450	SO	G8	//////	//////	M3	2590	S
B9	2370	SO	G9	//////	//////	M4	2450	S
C1	2510	NO	H1	2630	NO	M5	//////	//////
C2	2650	NO	H2	2630	S	M6	//////	//////
C3	2670	S	H3	2520	S	M7	//////	//////
C4	2570	SE	H4	2360	S	M8	//////	//////
C5	2500	SE	H5	2280	S	M9	//////	//////
C6	2410	E	H6	2250	—			
C7	2470	NE	H7	2250	—			
C8	//////	//////	H8	//////	//////			
C9	//////	//////	H9	//////	//////			
D1	2620	NO	I1	//////	//////			
D2	2720	SE	I2	//////	//////			
D3	2630	SE	I3	2510	S			
D4	2550	SE	I4	2380	S			
D5	2450	SE	I5	2290	SO			
D6	2400	E	I6	2250	—			
D7	2440	NE	I7	2250	—			
D8	2430	SE	I8	//////	//////			
D9	2370	E	I9	//////	//////			
E1	2700	NO	J1	//////	//////			
E2	2650	SE	J2	2620	S			
E3	2540	SE	J3	2530	S			
E4	2450	SE	J4	2410	SO			
E5	2370	SE	J5	2350	O			
E6	2360	E	J6	2320	O			
E7	2410	SE	J7	2310	O			
E8	2360	SE	J8	2320	O			
E9	2290	E	J9	2330	O			





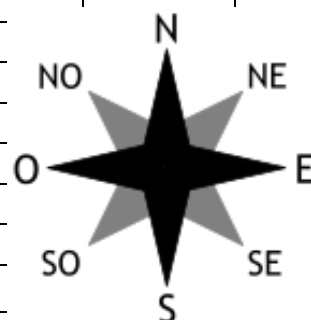
CARTE 2



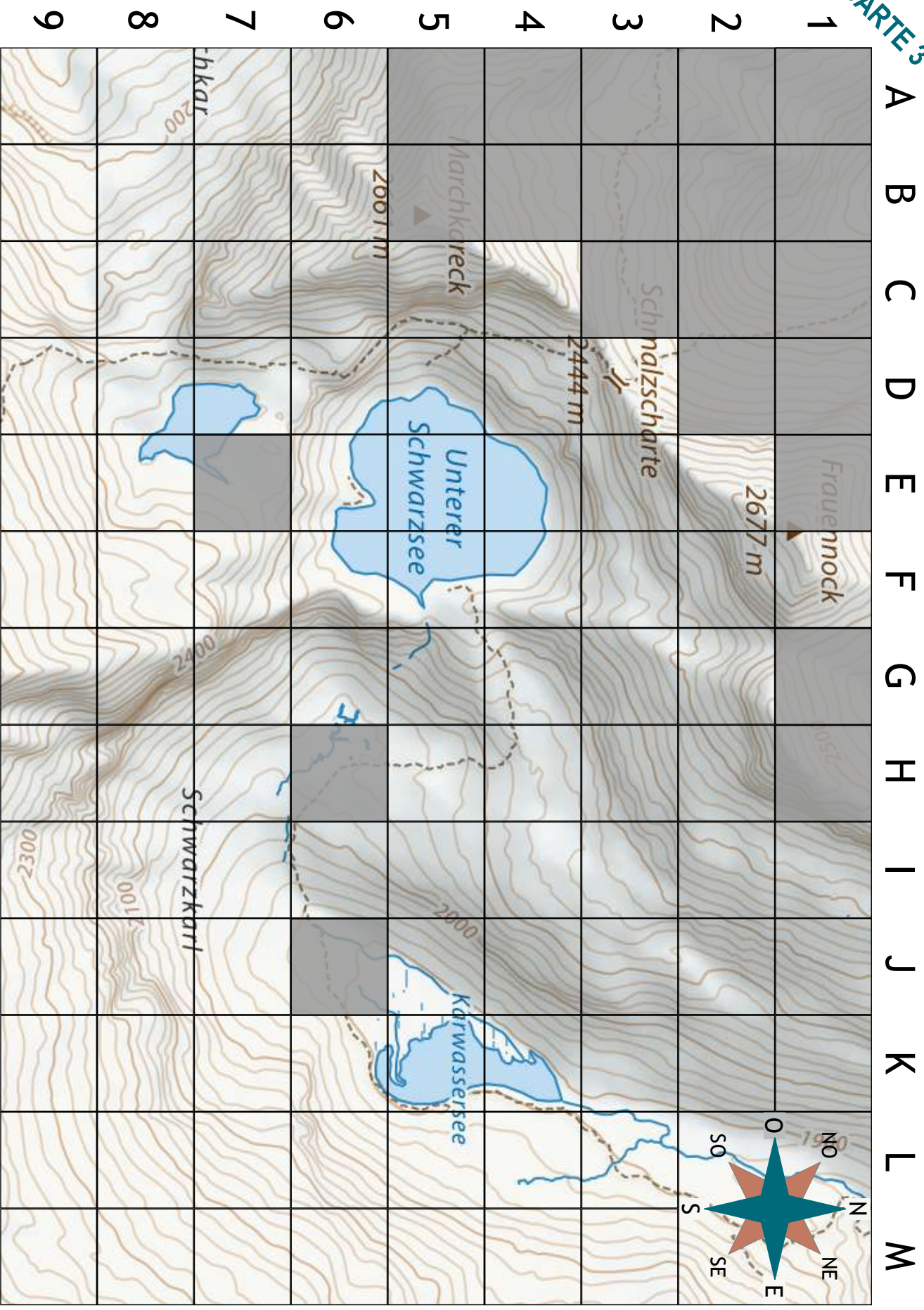


Carte 2 : fiche réponses

Point	Altitude	Gradient	Point	Altitude	Gradient	Point	Altitude	Gradient
A1	1380	SE	F1	1120	SE	K1	//////	//////
A2	1360	SE	F2	//////	//////	K2	//////	//////
A3	1300	SE	F3	//////	//////	K3	1220	N
A4	1280	SE	F4	1100	O	K4	1240	O
A5	1200	SE	F5	//////	//////	K5	1240	N
A6	1160	SE	F6	//////	//////	K6	1360	N
A7	1160	N	F7	1180	E	K7	1280	S
A8	1200	N	F8	1240	N	K8	1200	S
A9	1240	NO	F9	1340	NE	K9	1180	SO
B1	1300	SE	G1	//////	//////	L3	1240	NO
B2	1300	SE	G2	//////	//////	L4	1260	SO
B3	1260	SE	G3	//////	//////	L5	1300	NO
B4	1180	E	G4	1160	S	L6	1360	NO
B5	//////	//////	G5	1140	O	L7	1280	S
B6	//////	//////	G6	//////	//////	L8	1120	SO
B7	1190	NO	G7	//////	//////	L9	1240	S
B8	1220	N	G8	//////	//////	M3	1300	NO
B9	1300	N	G9	1280	NE	M4	1320	NO
C1	1340	SE	H1	//////	//////	M5	1300	O
C2	1240	S	H2	//////	//////	M6	1360	SO
C3	1160	SE	H3	1180	N	M7	1300	SO
C4	1140	SE	H4	1180	SO	M8	1260	O
C5	//////	//////	H5	1180	NO	M9	1220	S
C6	//////	//////	H6	1210	SO			
C7	1240	NO	H7	//////	//////			
C8	1210	NO	H8	//////	//////			
C9	1240	N	H9	1180	NE			
D1	1260	E	I1	//////	//////			
D2	1250	SE	I2	//////	//////			
D3	1160	SE	I3	1260	NO			
D4	1100	E	I4	1180	S			
D5	1100	N	I5	1220	N			
D6	1180	N	I6	1300	SO			
D7	1280	N	I7	1200	O			
D8	1340	E	I8	1200	SO			
D9	1340	O	I9	1160	N			
E1	1160	SE	J1	//////	//////			
E2	1140	E	J2	//////	//////			
E3	1080	S	J3	1240	NE			
E4	1060	—	J4	1180	SO			
E5	1120	N	J5	1240	NO			
E6	1220	NE	J6	1340	O			
E7	1300	E	J7	1320	SO			
E8	1320	NE	J8	1240	SO			
E9	1400	NE	J9	1120	—			

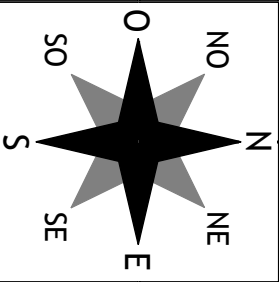
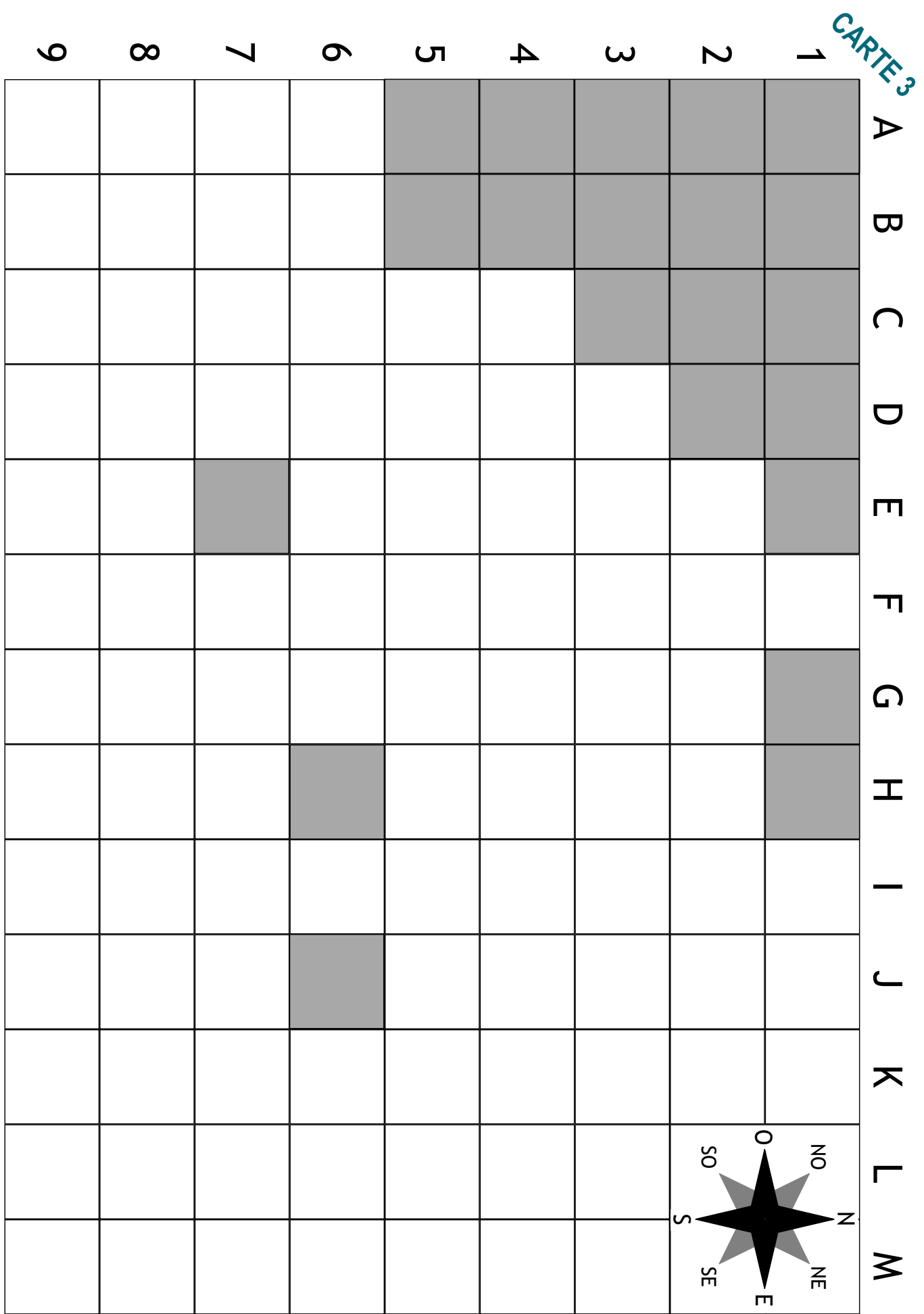


CARTE 3





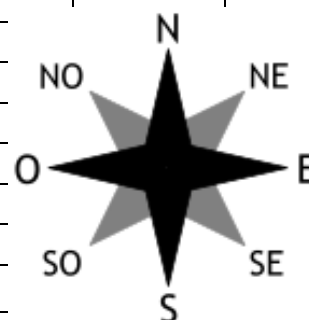
CARTE 3



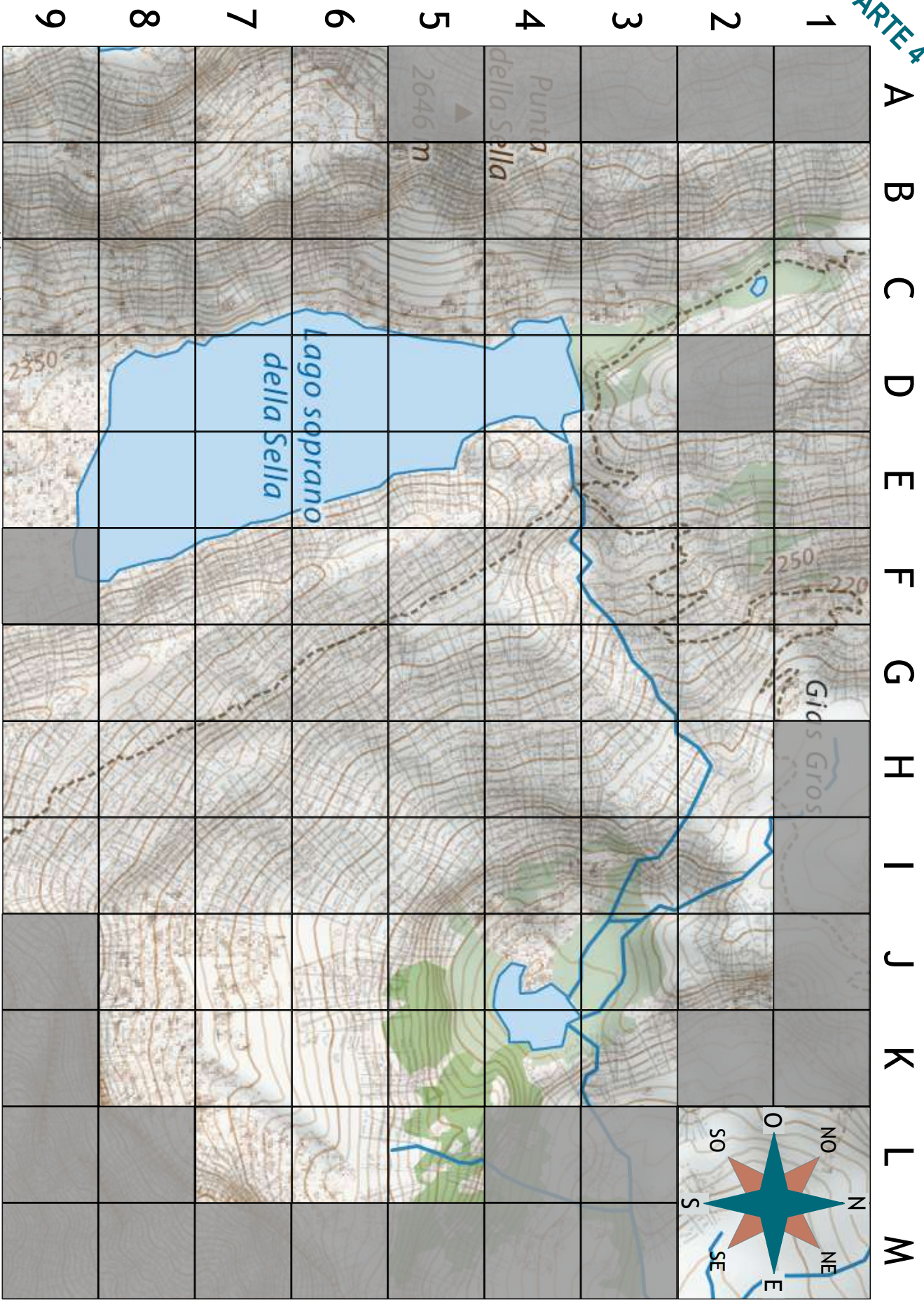
Atelier Descente de gradient

Carte 3 : fiche réponses

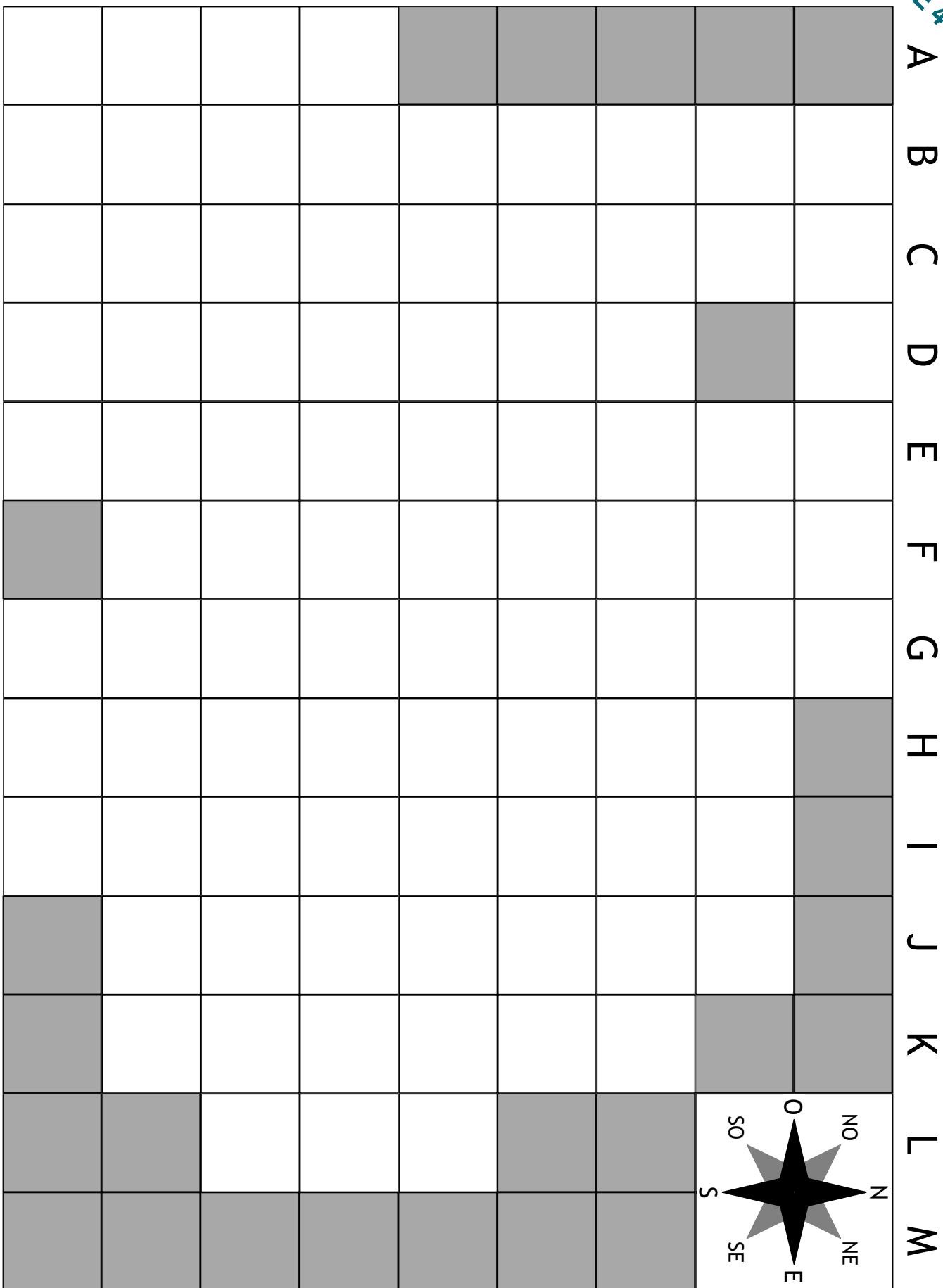
Point	Altitude	Gradient	Point	Altitude	Gradient	Point	Altitude	Gradient
A1	//////	//////	F1	2640	NE	K1	2040	E
A2	//////	//////	F2	2480	S	K2	2000	SE
A3	//////	//////	F3	2360	S	K3	1940	E
A4	//////	//////	F4	2240	SO	K4	1900	—
A5	//////	//////	F5	2220	—	K5	1900	—
A6	2360	SO	F6	2240	NO	K6	1940	N
A7	2220	SO	F7	2340	N	K7	2020	NO
A8	2180	SO	F8	2440	N	K8	2180	N
A9	2120	O	F9	2540	N	K9	2300	N
B1	//////	//////	G1	//////	//////	L3	1900	SO
B2	//////	//////	G2	2460	S	L4	1920	O
B3	//////	//////	G3	2320	SE	L5	1940	NO
B4	//////	//////	G4	2180	E	L6	2020	NO
B5	//////	//////	G5	2140	SE	L7	2140	NO
B6	2480	SO	G6	2060	E	L8	2240	NO
B7	2340	SO	G7	2140	NE	L9	2320	NO
B8	2240	SO	G8	2440	NE	M3	1980	O
B9	2240	NO	G9	2560	NE	M4	2000	O
C1	//////	//////	H1	//////	//////	M5	2060	NO
C2	//////	//////	H2	2380	SE	M6	2160	NO
C3	//////	//////	H3	2260	S	M7	2240	NO
C4	2500	SE	H4	2140	S	M8	2300	NO
C5	2500	E	H5	2060	S	M9	2360	NO
C6	2500	E	H6	//////	//////			
C7	2480	E	H7	2040	NE			
C8	2320	SO	H8	2120	NE			
C9	2320	NO	H9	2340	NE			
D1	//////	//////	I1	2320	E			
D2	//////	//////	I2	2280	E			
D3	2440	S	I3	2180	SE			
D4	2320	SE	I4	2140	SE			
D5	2240	E	I5	2060	SE			
D6	2300	NE	I6	1980	E			
D7	2340	—	I7	1980	NE			
D8	2380	NE	I8	2080	NE			
D9	2440	N	I9	2260	N			
E1	//////	//////	J1	2200	E			
E2	2580	SE	J2	2120	E			
E3	2400	S	J3	2100	E			
E4	2220	—	J4	2040	SE			
E5	2220	—	J5	1920	SE			
E6	2240	N	J6	//////	//////			
E7	//////	//////	J7	1940	N			
E8	2360	NO	J8	2080	N			
E9	2480	NO	J9	2300	N			



CARTE 4

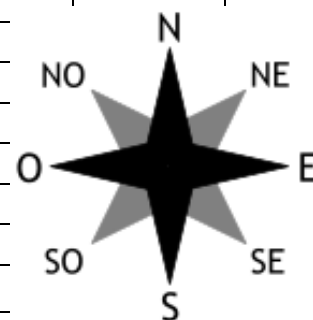


© regione.piemonte.it téléchargé de francetopo.fr



Carte 4 : fiche réponses

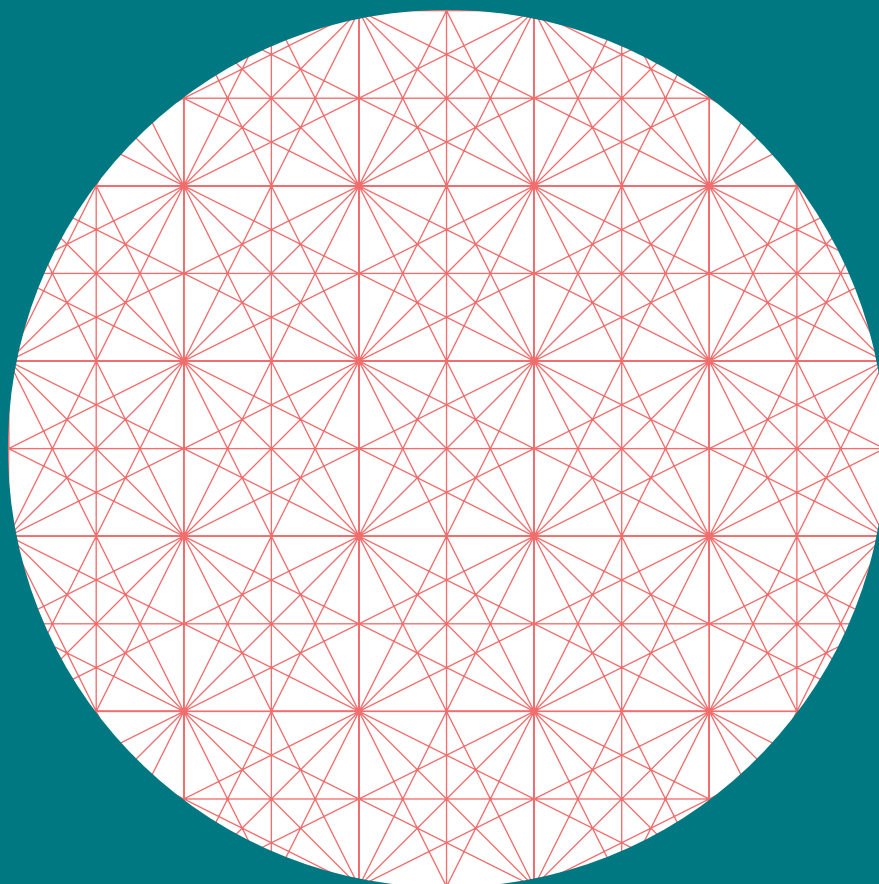
Point	Altitude	Gradient	Point	Altitude	Gradient	Point	Altitude	Gradient
A1	//////	//////	F1	2210	E	K1	//////	//////
A2	//////	//////	F2	2250	NE	K2	//////	//////
A3	//////	//////	F3	2270	E	K3	//////	//////
A4	//////	//////	F4	2300	N	K4	2020	—
A5	//////	//////	F5	2350	NE	K5	2100	N
A6	2250	SE	F6	2390	NE	K6	2190	N
A7	2570	NE	F7	2400	O	K7	2250	N
A8	2660	E	F8	2350	O	K8	2300	N
A9	2650	E	F9	//////	//////	K9	//////	//////
B1	2440	E	G1	2150	E	L3	//////	//////
B2	2470	E	G2	2190	NE	L4	//////	//////
B3	2490	E	G3	2220	NE	L5	2100	N
B4	2470	E	G4	2270	E	L6	2190	N
B5	2480	E	G5	2280	NE	L7	2250	N
B6	2500	E	G6	2330	NE	L8	//////	//////
B7	2510	E	G7	2380	NE	L9	//////	//////
B8	2540	E	G8	2430	NE	M3	//////	//////
B9	2520	E	G9	2420	O	M4	//////	//////
C1	2370	S	H1	//////	//////	M5	//////	//////
C2	2370	SE	H2	2140	NE	M6	//////	//////
C3	2370	E	H3	2170	NE	M7	//////	//////
C4	2370	E	H4	2190	E	M8	//////	//////
C5	2380	E	H5	2210	NE	M9	//////	//////
C6	2360	E	H6	2260	NE			
C7	2380	E	H7	2330	NE			
C8	2400	E	H8	2380	NE			
C9	2410	E	H9	2430	NE			
D1	2400	E	I1	//////	//////			
D2	//////	//////	I2	2100	SE			
D3	2360	S	I3	2080	E			
D4	2330	—	I4	2080	E			
D5	2330	—	I5	2150	NE			
D6	2330	—	I6	2210	NE			
D7	2330	—	I7	2270	NE			
D8	2330	—	I8	2330	NE			
D9	2340	NE	I9	2400	NE			
E1	2320	E	J1	//////	//////			
E2	2320	E	J2	2080	SE			
E3	2280	E	J3	2030	S			
E4	2330	NE	J4	2020	—			
E5	2350	O	J5	2090	N			
E6	2330	—	J6	2180	N			
E7	2330	—	J7	2240	N			
E8	2330	—	J8	2310	N			
E9	2330	—	J9	//////	//////			



Les points de la carte sont identifiés par leurs coordonnées : la lettre indique la colonne et le nombre indique la ligne.

L'altitude est prise au centre du carré correspondant aux coordonnées. Le gradient correspond à la direction de descente plus rapide ; si marqué « — », la zone est plate.

Légende pour les directions : N = nord, O = ouest, S = sud, E = est.



Institut Henri Poincaré | Maison Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris

profs-maison-poincare@ihp.fr
01 44 27 64 73
maison-poincare.fr

