

ATELIER

Les dés sont jetés

Atelier – Les dés sont jetés

Cet atelier permet de découvrir et jouer avec des dés aux formes inhabituelles, afin de comprendre comment la forme et la disposition des faces d'un dé influencent les probabilités de sortie lors d'un lancer.

Notions de médiation :

- Notion de **dé équilibré** (à N faces), dont chaque face a la même probabilité de sortir lors d'un lancer ; on apprend cette notion en testant plusieurs dés équilibrés et non équilibrés
- **Polyèdre isoédrique**, polyèdre où toutes les faces sont identiques et ont la même taille : tous les polyèdres isoédriques sont des dés équilibrés, même si leurs faces sont irrégulières
- **Théorème de Diaconis-Keller** : même des polyèdres qui ne sont pas isoédriques, notamment les prismes et les doubles pyramides, peuvent se comporter comme des dés équilibrés, à condition de trouver le rapport optimal entre hauteur des faces latérales et largeur de la base

Matériel nécessaire par groupe de 3–4 élèves :

- 1 piste pour rouler les dés
- Dés de plusieurs formes, construits à partir de patrons papier (en annexe) ou fabricables en impression 3D) :
 - * 1 dé cubique classique
 - * 1 dé en forme de pavé « perdant »
 - * 1 dé en forme de pavé « gagnant »
 - * 1 dé rhomboédrique
 - * 1 dé octaédrique
 - * 1 dé en forme de prisme hexagonal court
 - * 1 dé en forme de prisme hexagonal moyen
 - * 1 dé en forme de prisme hexagonal long
 - * 1 dé en forme de prisme triangulaire court
 - * 1 dé en forme de prisme triangulaire moyen
 - * 1 dé en forme de prisme triangulaire long
- 1 feuille pour noter les scores des lancers (en annexe)
- Crayons ou stylos
- Pour le groupe entier : tableau et craies/feutres pour noter les scores des équipes
- Optionnel : des gobelets pour rouler les dés
- Optionnel : autres dés en plusieurs formes (4, 8, 10, 12, 20, 60, ... faces), dés en forme de double pyramide, ...

Durée : 45–60 minutes

Age du public : lycéens (15–18 ans) ou collégiens (13–14 ans)

Déroulé

Informations

En bleu figurent les moments où les élèves expérimentent, en vert les moments où nous intervenons, en noir le développement et les explications de l'atelier.

Préparation (5 minutes).

Les participants et participantes sont divisés en équipes de 3 ou 4. Chaque équipe s'installe autour d'une table, sur laquelle sont posées une piste pour dés et une feuille pour noter les scores.

Le but de chaque équipe est de gagner un maximum de parties. Chaque partie consiste en 4 lancers de dés, dont on additionne les résultats pour calculer le score final. En fonction du type de partie, l'équipe gagnante est celle qui a le score plus élevé ou le score qui se rapproche le plus d'un nombre fixé en avance.

Chacune des parties listées peut être rejouée plusieurs fois pour que les élèves comprennent bien les concepts ou pour qu'ils puissent simplement s'amuser.

Introduction aux duels (5 minutes).

Pour commencer, on demande au public qu'est-ce que le hasard, où on le trouve et s'il serait possible de le maîtriser. Ensuite on montre des dés cubiques classiques et demande si tout le monde a déjà joué avec (la réponse devrait être oui). Éventuellement on explique que le mot « hasard » signifie « dé à jouer » en arabe.

Première partie (5 minutes) : dés à 6 faces classiques.



Figure 1. Dés à 6 faces cubiques.

On défie le public à essayer de contrôler l'issue du lancer d'un dé cubique classique. Chaque équipe joue avec un dé, réalise 4 lancers et calcule la somme des résultats. Chaque équipe note les scores des 4 lancers et la somme sur le tableau marqué « partie 1 » dans sa feuille, puis l'animateur ou animatrice note le total de chaque équipe au tableau. L'équipe avec le plus haut score gagne.

À la fin de la partie on discute : est-ce que cela a été possible de contrôler le mouvement du dé ? La réponse est plutôt non. Comme on n'arrive pas à maîtriser le mouvement d'un dé, on dit que le résultat d'un lancer est le fruit du hasard.

Deuxième partie (5–10 minutes) : dés « pavés » à 6 faces.

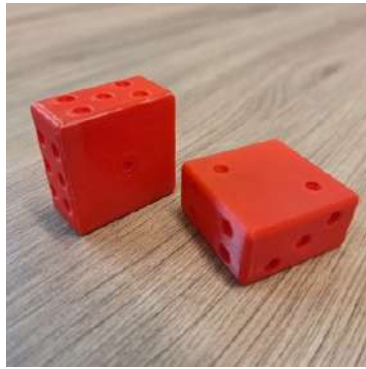


Figure 2. Pavés à 6 faces «perdants». Figure 3. Pavés à 6 faces «gagnants».

On annonce que cette fois-ci il devrait être plus facile de contrôler les résultats des lancers. On distribue 2 « pavés » différents par équipe. Le défi est à nouveau de réaliser le plus haut score en combinant 4 lancers, mais cette fois-ci les joueurs et joueuses devront choisir lequel des 2 dés « pavés » utiliser à chaque lancer (un seul dé par lancer).

À la fin de la partie on discute : quel dé fallait-il choisir pour avoir un meilleur score ? Pourquoi ? Est-ce que, parmi les 3 dés qu'on a vu jusqu'à présent, on pourrait établir un « classement » du dé plus « fort » au dé plus « faible » ? On introduit ainsi la notion de dé équilibré et on conclut qu'on peut réaliser un dé équilibré ou non en fonction de comment l'on choisit la taille des faces.

Troisième partie (5–10 minutes) : dés rhomboédriques.

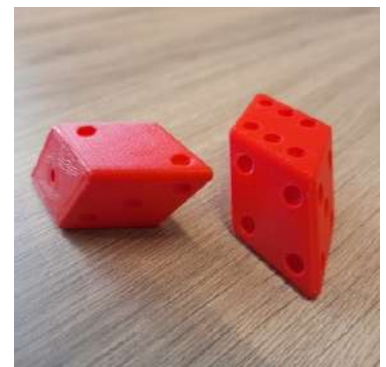


Figure 4. Dés rhomboédriques.

On introduit un 4ème dé, le rhomboèdre.

Discussion : est-ce que ce dé est équilibré ? Les participants et participantes formulent leurs hypothèses, jouent la partie et ensuite comparent les scores avec ceux des deux parties précédentes.

On peut à ce moment introduire les gobelets et les utiliser systématiquement dans la suite de l'atelier pour lancer les dés : de cette façon, il n'est plus possible d'influencer un lancer par les mouvements de ses mains.

Discussion de fin : comment était le dé rhomboédrique par rapport aux autres ? S'agit-il d'un dé équilibré ou pas ? La réponse est oui, malgré sa forme bizarre. On introduit alors le concept de polyèdre isoédrique.

Si on l'a, on peut montrer au public un dé bizarre en forme de trapézoèdre asymétrique et montrer qu'il s'agit bel et bien d'un isoèdre et donc d'un dé équilibré.

Explications.



Figure 5. Dé trapézoèdre asymétrique.

Un **dé** est **équilibré** quand chacune de ses faces a la même probabilité de sortir lors d'un lancer. C'est le cas par exemple pour un dé cubique classique. Pour déséquilibrer un dé on peut jouer sur sa géométrie : les dés « pavés », qui ont 2 faces deux fois plus grandes que les 4 autres, ont tendance à tomber plus souvent sur les faces plus grandes. Attention par contre car la probabilité ne dépend pas juste de la taille des faces : on ne peut pas dire simplement « 2 fois plus large = 2 fois plus probable », car il faut prendre en compte aussi les variables dynamiques liées au mouvement des dés (voir explications plus bas). Si pour l'atelier on utilise des dés fabriqués en 3D, il faut aussi remarquer qu'aucun d'eux n'est réellement équilibré, car ils ne sont en général pas homogènes à l'intérieur.

Le rhomboèdre et le trapézoèdre asymétriques sont des dés équilibrés, car il s'agit de solides dont toutes les faces sont identiques et de la même taille : ils sont des **polyèdres isoédriques** (plus précisément, un polyèdre isoédrique est un polyèdre convexe où chaque face est superposable aux autres via des isométries, c'est-à-dire des opérations de translation, inversion ou rotation). Les polyèdres isoédriques sont des dés équilibrés : à noter qu'ils ont toujours un **nombre pair** de faces.

Quatrième partie (10 minutes) : dés à 8 faces non isoédriques.



Figure 6. Dés à 8 faces : prismes hexagonaux et octaèdre.

On demande aux participants et participantes s'ils ou elles connaissent des dés avec un nombre différent de faces que les dés classiques à 6. Il ou elle peut montrer des dés de jeu de rôle à 4, 8, 10, 12, 20, ... faces et demander s'ils sont équilibrés ou non. La réponse est oui, car ils sont isoédriques.

On annonce qu'on va jouer avec des dés dont les faces ne sont pas toutes identiques. On



distribuée à chaque équipe un dé octaédrique et 3 dés en forme de prismes à base hexagonale avec hauteurs différentes ; comme pour les dés à 6 faces, on invite le public à réfléchir à l'avance sur les comportements de ces dés.

Cette fois-ci, la victoire n'est pas attribuée au plus haut score sur le total des 4 lancers, mais au score qui se rapproche le plus de 18. Comme pour la partie 2, il faut choisir un seul dé pour chaque lancer.

Discussion à la fin de la partie : comment classer les dés du plus fort au plus faible ? Quels sont les dés équilibrés dans le lot ?

On explique que l'on peut réaliser des dés équilibrés même s'ils ne sont pas isoédriques : il faut juste trouver le rapport optimal entre la taille de la base et celle des faces latérales d'un prisme. C'est le **théorème de Diaconis-Keller**.

Cinquième partie (10 minutes) : dés à 5 faces non isoédriques.



Figure 7. Dés à 5 faces : prismes triangulaires.

On fait remarquer au public que jusqu'ici on a toujours joué avec des dés à un nombre pair de faces. Or, avec les prismes on peut réaliser des dés équilibrés avec un nombre impair de faces.

Chaque équipe reçoit 3 dés en forme de prismes triangulaires. La victoire est attribuée au score final qui se rapproche le plus de 12. Il faut choisir son dé avant chaque lancer. Note technique : lorsqu'un dé tombe sur l'une des faces latérales, on considère que le score est celui de la face qui touche le fond de la piste.

Discussion à la fin de la partie : comment classer les dés du plus fort au plus faible ? Quels sont les dés équilibrés dans le lot ?

On conclut que grâce au théorème de Diaconis-Keller il est possible de réaliser des dés équilibrés ayant un nombre impair de faces.

Explications.

Le **théorème de Diaconis – Keller** montre qu'il est possible de réaliser des dés équilibrés avec des polyèdres non isoédriques, à partir de prismes, anti-prismes, doubles pyramides et trapézoèdres. Pour chacun de ces polyèdres, il s'agit de trouver le rapport optimal entre la longueur du côté de la base (ou des bases) et la hauteur des faces latérales.

Lorsqu'on considère un prisme dont les bases sont des polygones à un nombre impair de faces, on peut alors construire des dés équilibrés avec un **nombre impair de faces**.

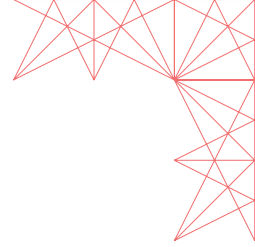
Le théorème démontre que ce rapport optimal existe, mais ne donne pas de formule pour le calculer. Si des formules existaient, elles devraient probablement prendre en compte non seulement la taille des faces, mais aussi des variables dynamiques comme les moments d'inertie. Il y aurait alors des formules différentes pour chaque type de polyèdre.

Conclusion (5 minutes).

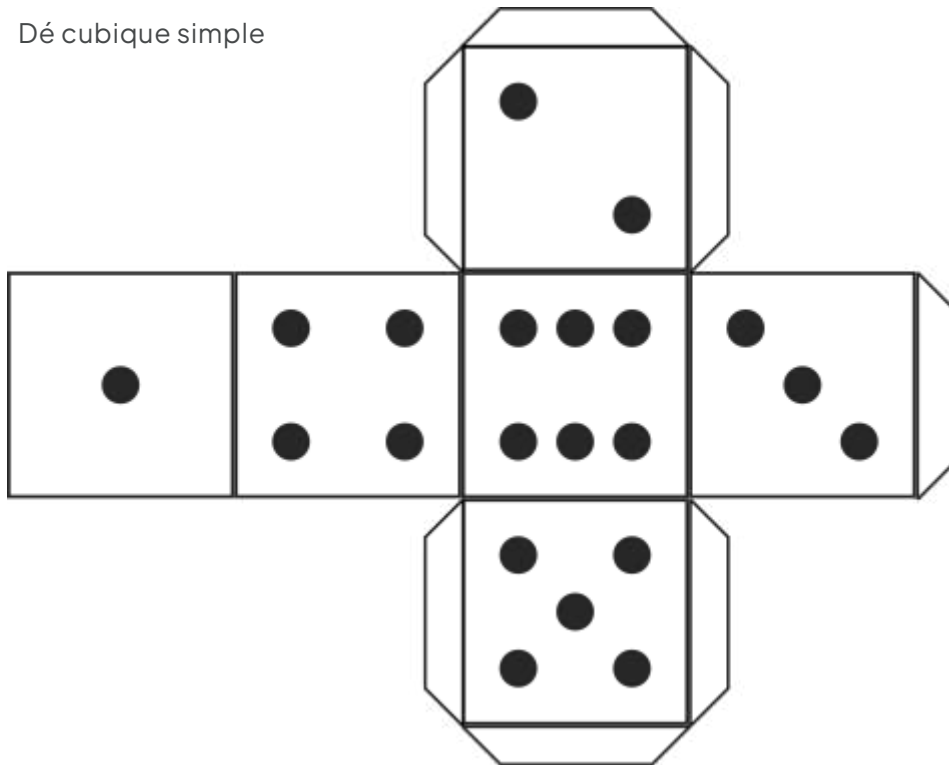
Pour terminer, on peut montrer et faire manipuler au public des dés en forme de double pyramide tronquée ou autres formes listées par le théorème de Diaconis-Keller.

Ressources :

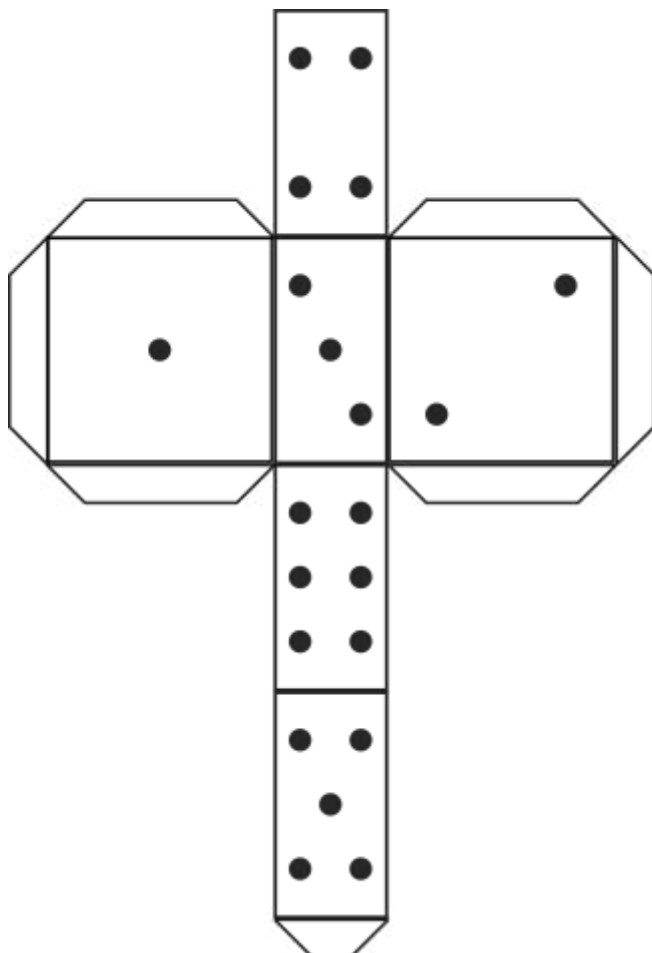
- Article de Diaconis et Keller : The American Mathematical Monthly, Apr., 1989, Vol. 96, No. 4 (Apr., 1989), pp. 337–339
- Polyèdres isoédriques : https://fr.wikipedia.org/wiki/Polyèdre_isoédrique ; <https://mathworld.wolfram.com/Isohedron.html>
- Discussion sur les dés équilibrés non isoédriques : <https://mathoverflow.net/questions/46684/fair-but-irregular-polyhedral-dice>
- Site qui vend des dés équilibrés isoédriques dont les faces ne sont pas régulières : <https://www.mathartfun.com/thedicelab.com/SkewDice.html>



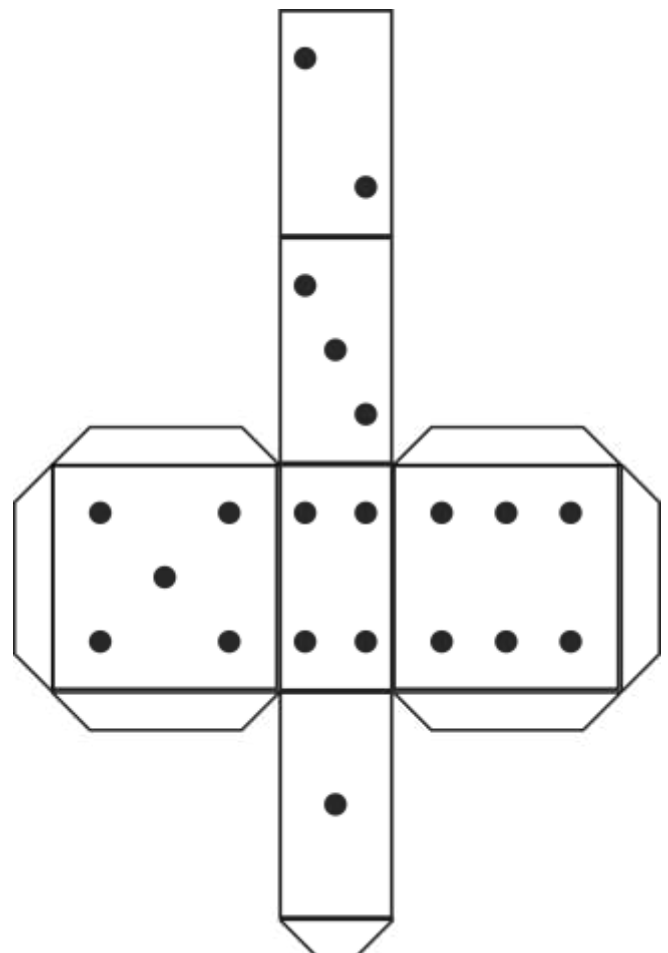
Dé cubique simple



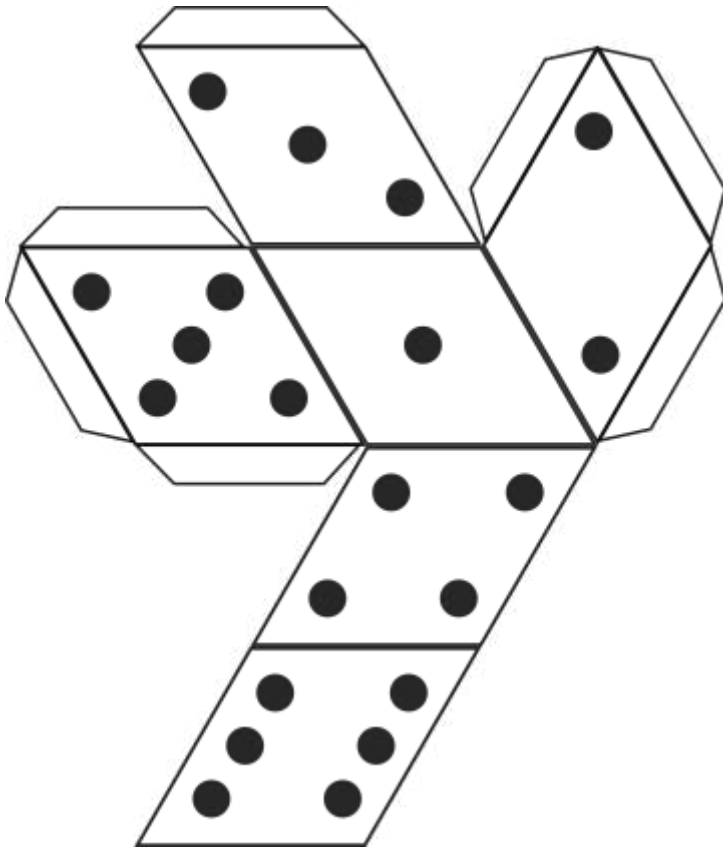
Pavé «perdant»



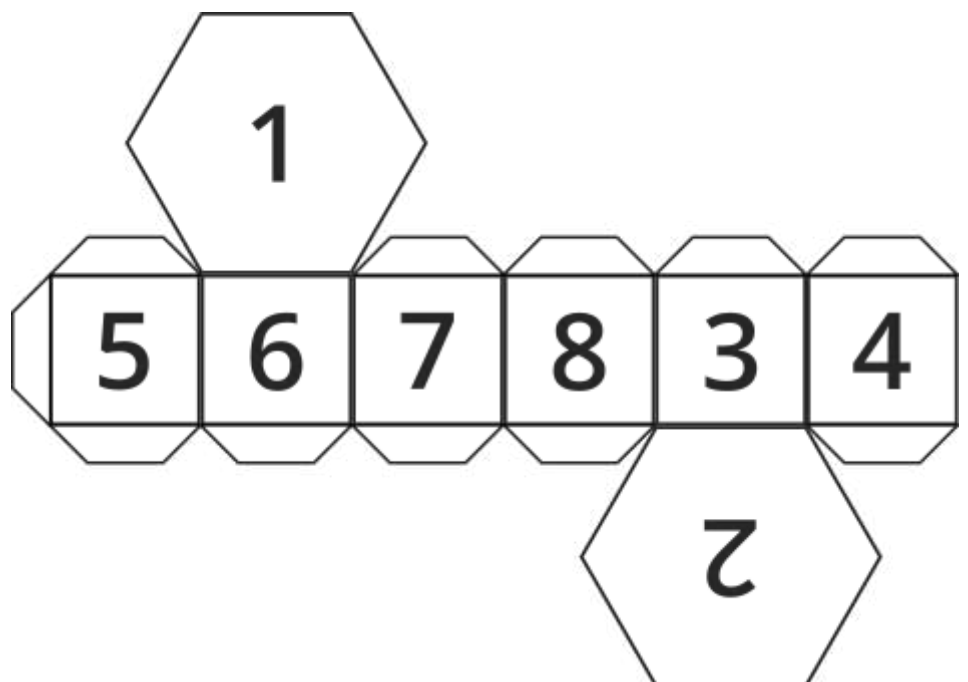
Pavé «gagnant»

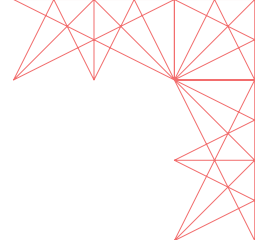


Dé rhomboédrique

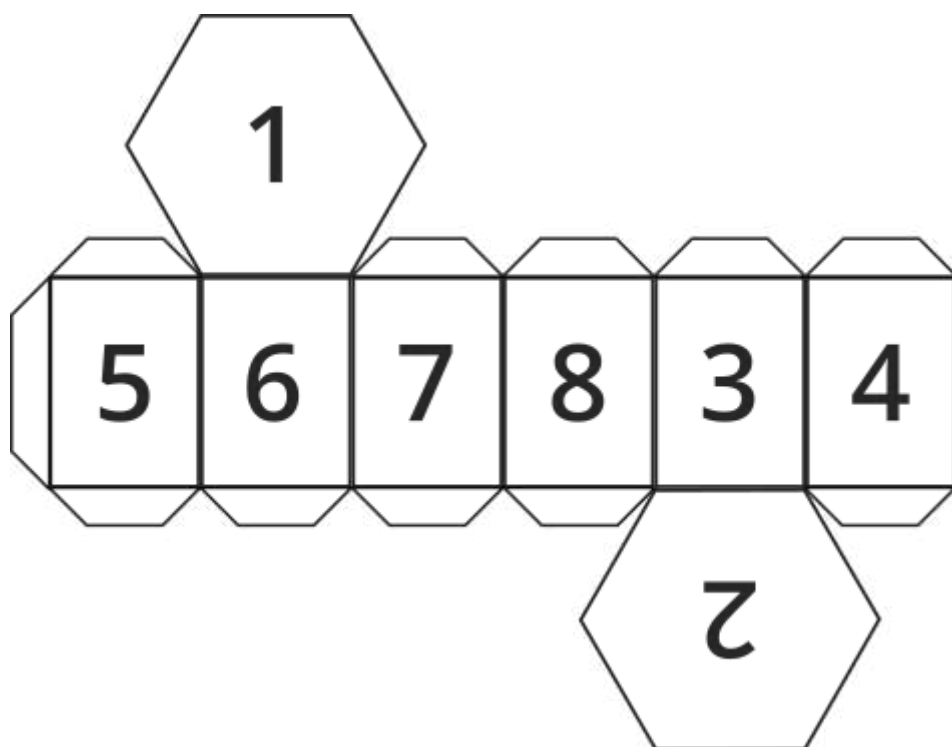


Dé en prisme hexagonal court

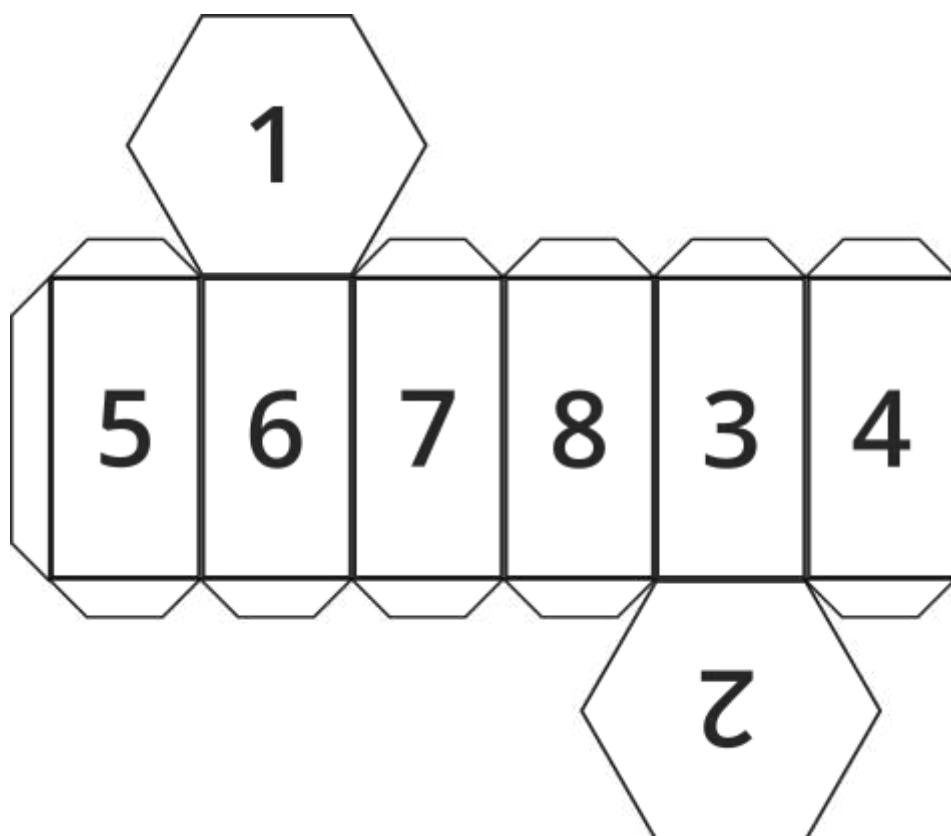




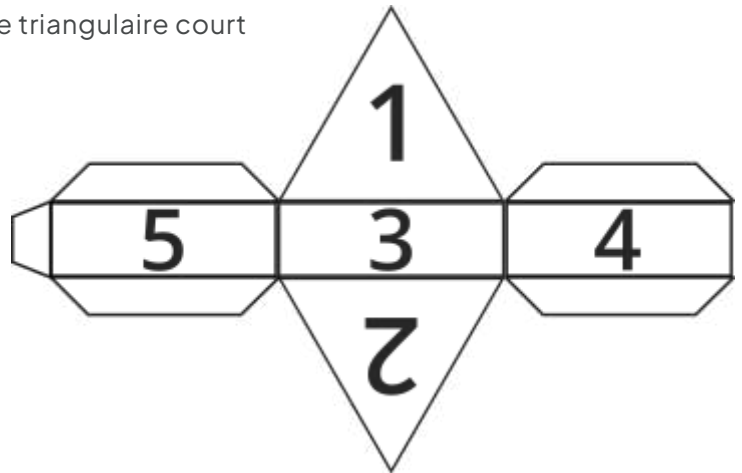
Dé en prisme hexagonal moyen



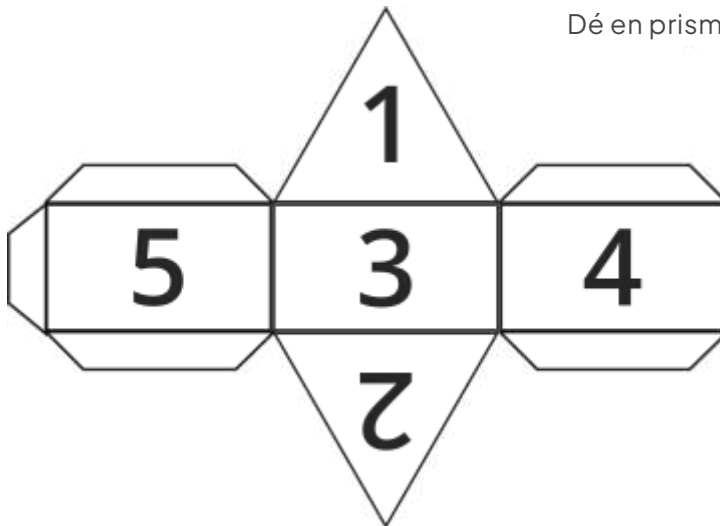
Dé en prisme hexagonal long



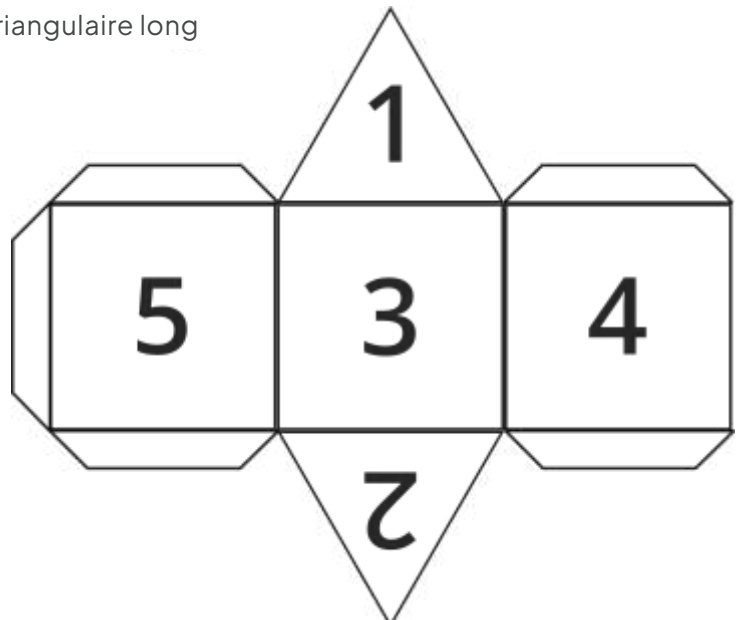
Dé en prisme triangulaire court



Dé en prisme triangulaire moyen



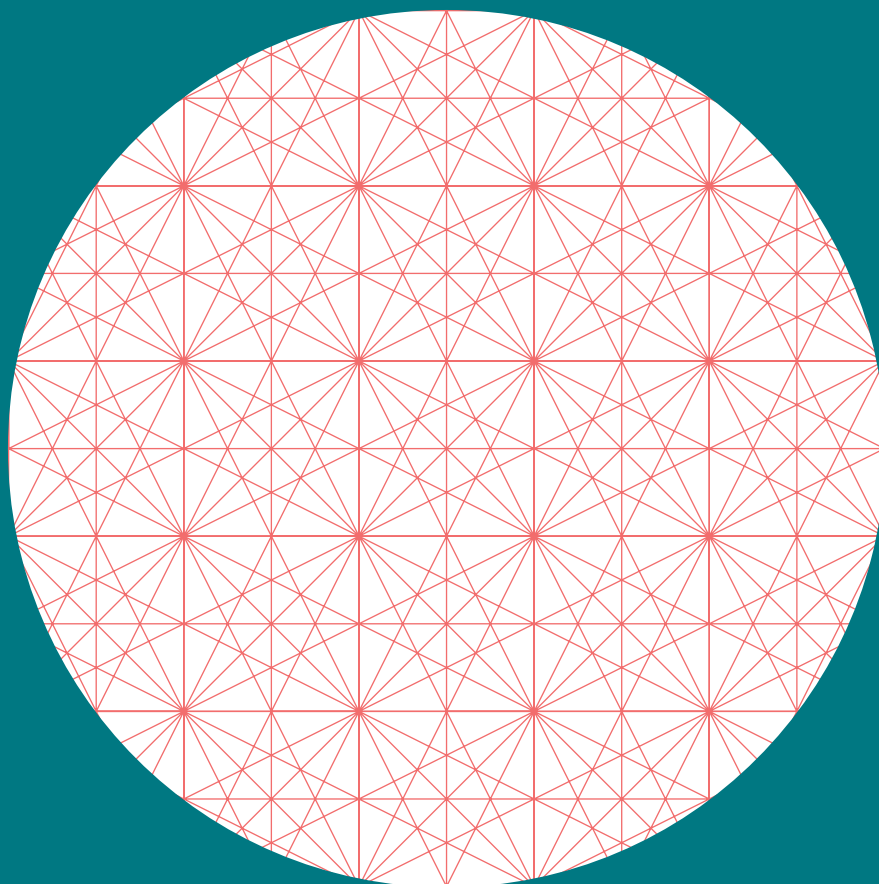
Dé en prisme triangulaire long



Atelier LES DÉS SONT JETÉS

Équipe _____

PARTIE 1	PARTIE 2	PARTIE 3	PARTIE 4	PARTIE 5
Lancer 1 :	Lancer 1 :	Lancer 1 :	Lancer 1 :	Lancer 1 :
Lancer 2 :	Lancer 2 :	Lancer 2 :	Lancer 2 :	Lancer 2 :
Lancer 3 :	Lancer 3 :	Lancer 3 :	Lancer 3 :	Lancer 3 :
Lancer 4 :	Lancer 4 :	Lancer 4 :	Lancer 4 :	Lancer 4 :
TOTAL :	TOTAL :	TOTAL :	TOTAL :	TOTAL :



Institut Henri Poincaré | Maison Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris

profs-maison-poincare@ihp.fr
01 44 27 64 73
maison-poincare.fr