

ATELIER

Coloriage de cartes



Atelier – Coloriage de cartes

Cet atelier a pour but de faire découvrir le théorème des quatre couleurs et ses applications. En étudiant le problème du coloriage d'une carte, l'atelier permet aussi d'introduire le concept mathématique de graphe et de parler de la naissance de la théorie des graphes à partir du problème des ponts de Königsberg. Dans sa version étendue, l'atelier permet d'explorer l'extension du théorème des quatre couleurs à des surfaces autres que le plan.

Matériel :

- Autant de cartes que d'élèves (les pays de l'Europe, cf. annexe 1),
- Des crayons de couleur,
- [Pour aller plus loin] Plusieurs tores (bouées) en tissu ou polystyrène,
- [Pour aller plus loin] Des Rulpidons en papier (à construire, cf. annexe 2)
- [Pour aller plus loin] Des patrons de Rulpidon (cf. annexe 2)
- [Pour aller plus loin] Ciseaux
- [Pour aller plus loin] Scotch
- [Pour aller plus loin] De la pâte à modeler.

Durée : Atelier – 50 à 60 min | Pour aller plus loin – 45 à 60 min

Âge du public : 4ème – 3ème (13–15 ans)

Déroulé de l'Atelier

Partie 1 : Expérimentation (20 min)

On présente aux élèves une carte géographique. Ici, une carte des différents pays d'Europe. On leur explique qu'ils vont devoir la colorier en suivant ces quelques règles :

- Deux pays qui partagent une frontière ne doivent pas être coloriés de la même couleur. Les mers et l'océan ne comptent pas comme une frontière.
- Il faut utiliser le moins de couleurs possibles.

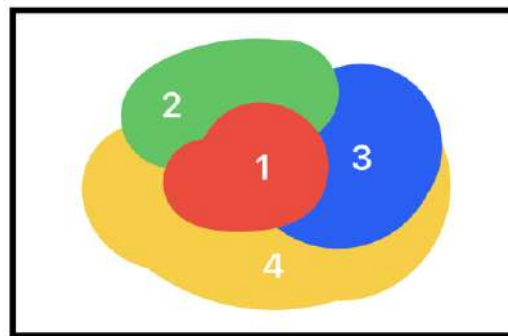


Le temps est laissé aux élèves de colorier la carte à l'aide de crayons de couleurs, puis on procède à un temps d'échange. Combien de couleurs ont-ils utilisé ? Comment ont-ils procédé ? Certaines zones étaient-elles plus difficiles à colorier que d'autres ?

On peut s'attendre à observer des réponses et techniques différentes. Ex : en commençant par un même pays, certains élèves colorient chaque pays frontalier d'une couleur différente, quand d'autres vont n'utiliser que deux couleurs, en alternant un pays frontalier sur deux. Certains utiliseront donc plus de couleurs que d'autres, pour colorier la même partie de la carte.

Partie 2 : Explications - Le théorème des quatre couleurs (5 - 10 min)

Si l'on veut colorier une carte en suivant les deux règles annoncées, il nous faudra au plus 4 couleurs différentes. C'est le théorème des quatre couleurs. Il indique qu'il est possible, en n'utilisant que quatre couleurs différentes au maximum, de colorier n'importe quelle carte dessinée sur une surface sans trous et découpée en régions connexes, de sorte que deux régions limitrophes (deux régions qui se touchent uniquement par un point ne sont pas considérées comme limitrophes) reçoivent toujours deux couleurs distinctes. Une région connexe est une région en un seul morceau : si des régions de la carte sont constituées de plusieurs morceaux séparés, le théorème ne s'applique pas. Ceci veut dire que, dans le cas de la carte d'Europe (ou d'une autre partie du monde), il faut considérer les exclaves comme des pays à part (par exemple le territoire russe de Kaliningrad). Le théorème des quatre couleurs a été conjecturé par Francis Guthrie en 1852 et a été prouvé dans les années 1970, à l'aide d'ordinateurs, par Kenneth Appel et Wolfgang Haken.



Ce théorème nous dit que 4 couleurs sont toujours suffisantes, mais parfois elles sont aussi nécessaires. Pour le faire comprendre aux élèves, on peut dessiner un échiquier et montrer que 2 couleurs suffisent, puis dessiner un pavage hexagonal et montrer que 3 couleurs suffisent. Ensuite, on esquisse la région comprenant France, Belgique, Allemagne et Luxembourg, où l'on voit qu'on ne peut pas faire avec moins de 4 couleurs.

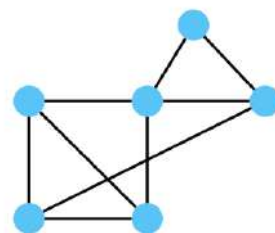
Nous pouvons visualiser le problème autrement, en essayant de dessiner une carte qui nécessiterait d'un maximum de couleurs pour être coloriée, toujours avec la consigne que deux régions frontalières n'aient pas la même couleur (on précise ici encore qu'une frontière est une ligne, et ne peut pas être simplement un point). Les élèves essaient sur une feuille.

On peut par exemple se retrouver avec ce type de schéma.

Il n'est pas possible de dessiner plus que 4 régions ayant chacune une frontière en commun avec les 3 autres, car une région se retrouve systématiquement entourée par les autres (ici la numéro 1 en rouge). C'est d'ailleurs ce qui se passe dans la région d'Europe avec France, Belgique, Allemagne et Luxembourg.

C'est encore une fois le théorème des quatre couleurs !

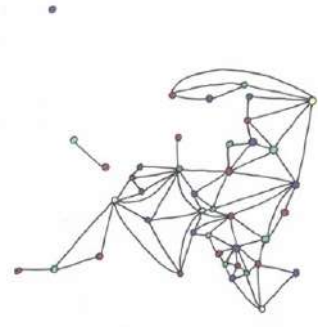
Partie 3 : La théorie des graphes (25 - 30 min)



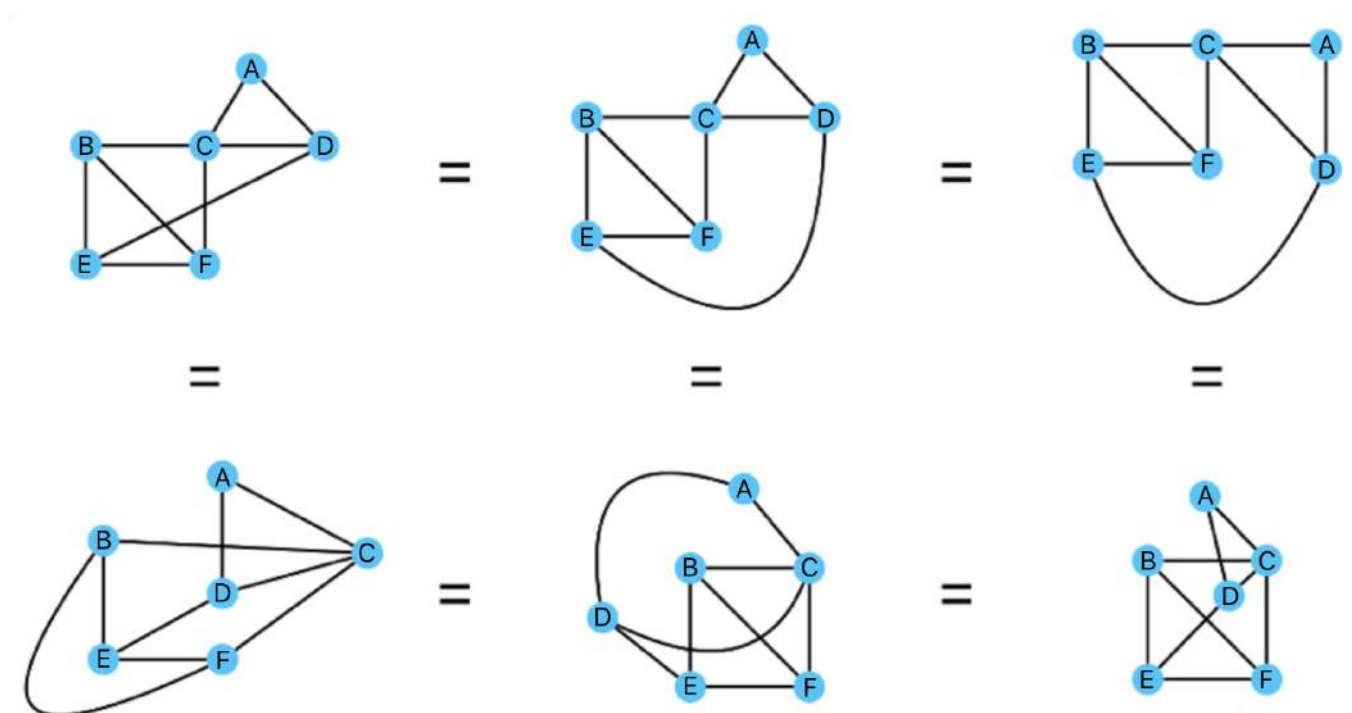
On peut maintenant représenter notre carte comme un graphe. Un graphe en mathématiques est un ensemble de sommets, reliés par des arêtes.

Exemple de graphe, avec les sommets en bleu, et les arêtes en noir.

Lorsqu'on représente l'Europe par un graphe, on peut réduire un pays à sa capitale, qui sera alors un sommet, puis on relie chaque capitale d'un pays frontalier par des routes, qui seront les arêtes. On peut alors colorier chaque sommet suivant la consigne que deux sommets reliés par une arête ne soient jamais de la même couleur.

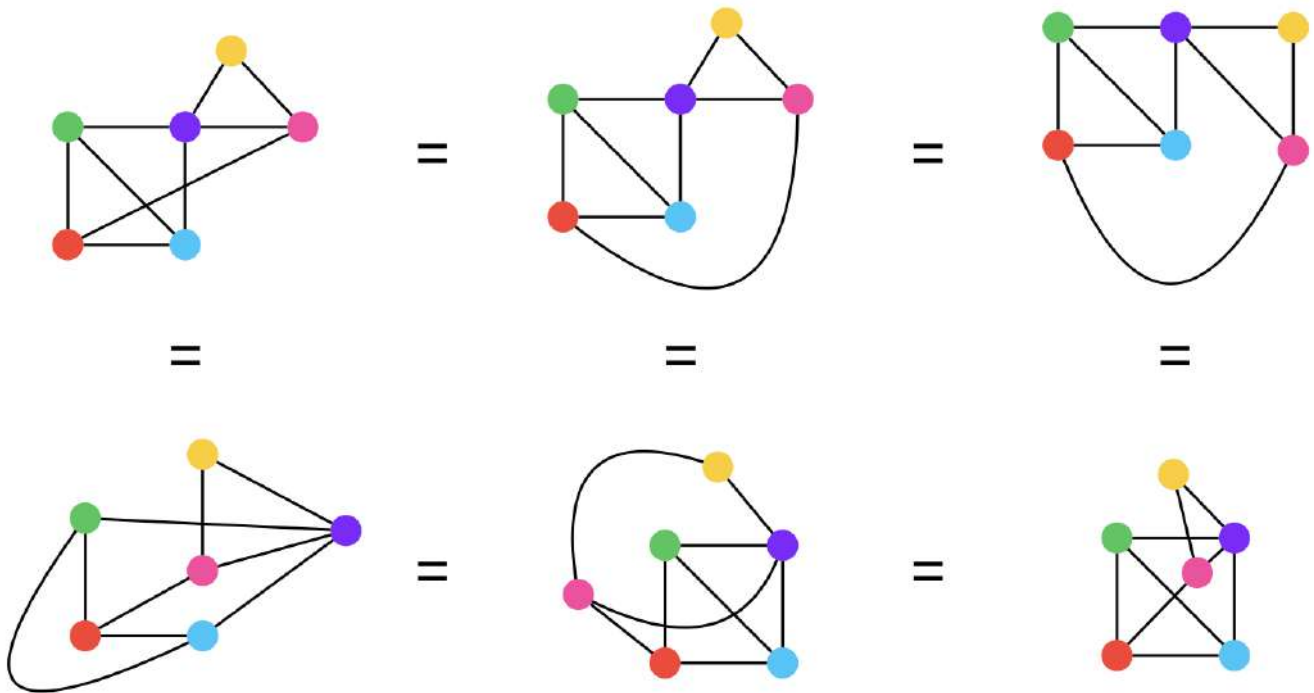


Un graphe est un dessin abstrait : on ne s'occupe pas de la position des arêtes et des sommets dans l'espace, mais uniquement de leurs connexions.



Par exemple, visuellement, tous ces objets semblent différents, pourtant il s'agit de tracés différents d'un seul et même graphe. En effet, les connexions sont conservées à l'identique entre chaque sommet. Par exemple, le sommet A est toujours connecté aux sommets C et D ; F est toujours relié à B, E et C... (Il est possible de représenter des tracés de graphes au tableau pour expliquer aux élèves).

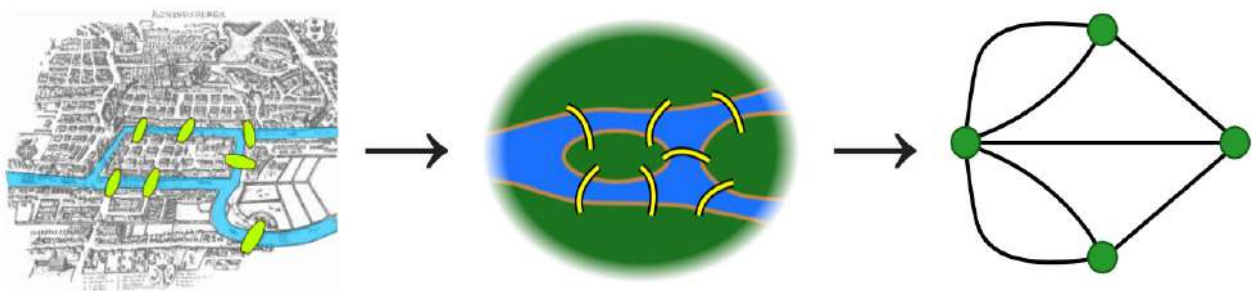
Si certains élèves ont du mal à visualiser l'équivalence de ces graphes, il est possible de leur montrer ces graphes avec les sommets coloriés (voir ci-dessous). De cette manière, on voit bien que le sommet rouge est toujours relié aux sommets vert, bleu et rose. De la même manière, jaune est toujours connecté à violet et rose, et ainsi de suite. **Attention cependant à ne pas créer de confusion vis-à-vis du théorème des quatre couleurs.**



Les graphes peuvent être utilisés pour modéliser certains problèmes mathématiques.

C'est le cas, par exemple, du problème des 7 ponts de Königsberg :

La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) était construite autour de deux îles. Les différentes rives de la ville étaient reliées par 7 ponts. On peut représenter la ville comme un graphe, où les sommets représentent les différentes parties de la ville, les quartiers séparés par la rivière, et les arêtes représentent les différents ponts (au nombre de 7) permettant de passer d'un quartier à un autre :



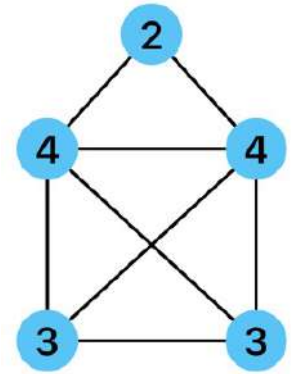
Le graphe représentant le problème est dessiné au tableau.

On demande aux élèves de chercher un chemin qui permettrait à un habitant de partir d'un quartier, de passer par chacun des ponts, une fois seulement, et de revenir à son point de départ. (Les élèves pensant avoir trouvé une solution peuvent le faire au tableau). Le chiffre indiqué sur chaque sommet correspond à son nombre de connexions.

Les élèves tentent de relever le défi sans y parvenir.

En effet, Leonhard Euler démontre au 18ème siècle que c'est impossible, en caractérisant les graphes pour lesquels un tel chemin existe. On nomme aujourd'hui ces graphes les **graphes « eulériens »** en son hommage.

Un exemple de graphe eulérien connu est celui que l'on nomme parfois la « maison de Saint-Nicolas » ou « l'enveloppe » :



Les élèves tentent à nouveau de relever le défi. Cette fois-ci, cela est possible.

La maison de Saint-Nicolas illustre un principe : pour pouvoir tracer une figure à main levée (et que le graphe associé soit eulérien), il faut que chaque sommet ait un nombre pair d'arêtes le reliant aux autres sommets, ou alors qu'il y ait exactement deux sommets avec un nombre impair d'arêtes les reliant à d'autres sommets. Dans le deuxième cas, il faut partir de l'un de ces sommets pour réaliser le dessin et terminer sur l'autre. Ici encore, le chiffre indiqué sur chaque sommet correspond à son nombre de connexions.

Partie 4 : En pratique (15 min)

Après avoir vu quelques utilisations de la théorie des graphes et du théorème des quatre couleurs sur des problèmes mathématiques d'apparence simple, les élèves sont invités à réfléchir à des applications dans la vie de tous les jours et à débattre ensemble de leurs idées.

On peut se pencher sur deux exemples pour montrer l'utilisation de ces outils mathématiques dans deux situations complètement différentes : la gestion de bandes de fréquences et l'organisation logistique d'événements.

Premier exemple d'application : en France, le gouvernement alloue aux opérateurs de téléphonie, moyennant finances, la bande de fréquences qu'ils peuvent utiliser. Au sein de cette bande, seules 300 fréquences sont réellement utiles. Bien évidemment il y a beaucoup plus que 300 téléphones en France et beaucoup plus que 300 conversations téléphoniques simultanées.

Pour ajouter de la complexité, si deux personnes proches géographiquement téléphonent chacune de leur côté à quelqu'un, ces appels ne peuvent pas être portés par des ondes avec une fréquence trop proche, sinon cela peut créer des interférences.

Si on pense chaque téléphone comme un sommet et que quand ces téléphones sont trop proches les uns des autres, on trace un trait entre eux (une arête), alors on trace un graphe.



Allouer, ou distribuer, correctement les fréquences à chaque téléphone revient à « colorier le graphe », c'est-à-dire qu'on associe une couleur (ou une fréquence) à chaque sommet en veillant à ce que deux sommets reliés par une arête ne soient jamais de la même couleur (pour éviter les interférences !).

Deuxième exemple d'application : une ville organise différents événements au cours de la semaine et souhaiterait pouvoir planifier le jour auquel ils auront lieu. Cependant, il leur est impossible de décider arbitrairement du jour de chaque événement, certains ne peuvent avoir lieu en même temps, car ils utilisent la même salle par exemple, ou bien qu'une même personne doit être présente à différents événements. Il est alors possible de représenter ce problème par un graphe, où chaque événement est un sommet, qui serait relié par une arête à un autre événement quand ils ne peuvent avoir lieu le même jour. Planifier leur programmation reviendrait alors à « colorier le graphe » en associant une couleur (ou un jour de la semaine) à chaque sommet, en faisant en sorte que deux sommets reliés par une arête possèdent une couleur différente.

On peut citer d'autres exemple de modélisations par des graphes :

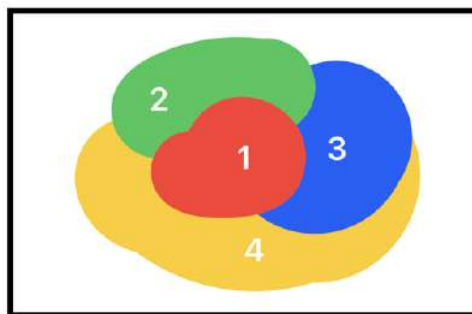
- Les réseaux de transports routiers, où les sommets représentent les carrefours et les arêtes les rues qui les relient
- Les réseaux informatiques, où les sommets représentent les machines informatiques et les arêtes les connexions physiques entre elles
- Les réseaux sociaux : une personne est représentée par un sommet, on relie deux sommets entre eux quand deux personnes se connaissent
- Les réseaux de pages web : chaque sommet représente une page web, qui est reliée à une autre lorsqu'un lien hypertexte menant à elle est présent sur cette page. Comme la connexion ne se fait que dans un sens, on parle dans ce cas de **graphe orienté**.

Pour aller plus loin

Pour un atelier plus long

Partie 5 : Colorier des surfaces autres que le plan

(Rappel) Revenons à notre carte de l'Europe et au théorème des quatre couleurs. Nous pouvons visualiser le problème autrement, en essayant de dessiner une carte qui nécessiterait d'un maximum de couleurs pour être coloriée, toujours avec la consigne que deux régions frontalières n'aient pas la même couleur (on précise ici encore qu'une frontière est une ligne, et ne peut pas être simplement un point). Les élèves essaient sur une feuille.



On peut par exemple se retrouver avec ce type de schéma.

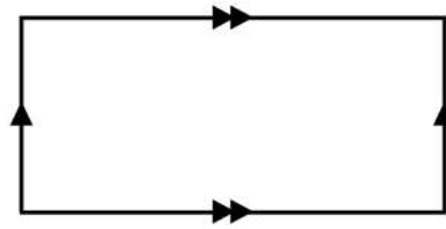
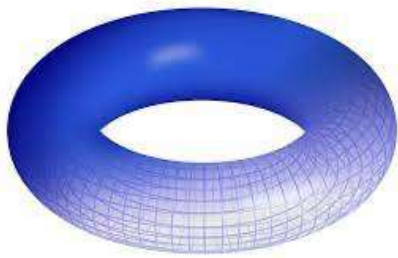
Il n'est pas possible de dessiner plus que 4 régions ayant chacune une frontière en commun avec les 3 autres, car une région se retrouve systématiquement entourée par les autres (ici la numéro 1 en rouge).

C'est encore une fois le théorème des quatre couleurs !

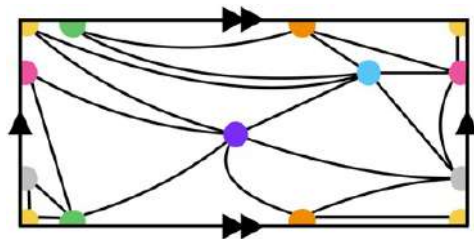
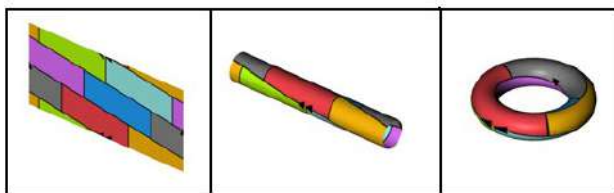
Pour l'instant, nous nous sommes concentrés sur les surfaces planes. À votre avis, que se passerait-il si l'on essayait de colorier une carte sur une autre surface, comme une sphère par exemple ? On laisse les élèves échanger entre eux. Intuitivement, on peut imaginer que le résultat serait le même, en plaçant notre carte des pays d'Europe sur une globe, car notre carte n'est qu'une projection de la sphère sur une surface plane. Cette intuition est juste, car 4 couleurs sont aussi suffisantes pour colorier une carte dessinée sur une sphère ; il faut cependant prendre en compte que, dans le passage du plan à la sphère, tout ce qui est autour des frontières extérieures de la carte devient une région à part entière sur le globe, ce qui peut nécessiter d'adapter le coloriage.

Mais qu'en serait-il sur d'autres surfaces ?

Prenons le **tore** par exemple, qui est une surface qui ressemble à un donut ou une bouée. Si on le déplie entièrement, on peut obtenir un rectangle dont on considère que les côtés opposés sont attachés (les côtés attachés sont représentés par des flèches de même type dans le schéma).



Combien de couleurs au maximum seraient-elles nécessaires pour colorier une carte sur un tore ? Cette question peut être reformulée en se demandant combien de régions au maximum on peut dessiner sur le tore, telles que chacune ait une frontière en commun avec toutes les autres. Les élèves essaient de répondre à cette question en petit groupe avec des tores en tissu ou en polystyrène, puis on met en commun les réponses avec le reste de la classe.



Au maximum, il est possible de dessiner 7 régions ayant chacune une frontière avec les 6 autres. Ceci implique que pour colorier une quelconque carte dessinée sur un tore, 7 couleurs sont suffisantes (pourvu que chaque région soit connexe). Il est également possible de représenter une carte coloriée par un graphe.

Nous pouvons maintenant essayer de nous pencher sur un nouvel objet : le Rulpidon !

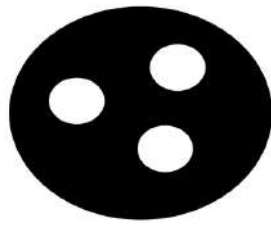
Des Rulpidons en papier sont présentés aux élèves (à construire en amont de l'atelier, cf. annexe 2).

Le Rulpidon est une œuvre mathématique d'Ulysse Lacoste et c'est l'emblème de la Maison Poincaré, il y en a même une version monumentale dans le jardin du musée.



Avant d'imaginer le colorier, on va se demander combien de trous possède le Rulpidon. Un temps est laissé aux élèves pour manipuler les maquettes et se questionner, puis la classe échange en argumentant ses réponses.

On peut s'attendre à ce que les élèves répondent que le Rulpidon possède 4 trous, un de chaque côté, ou 2 trous, traversant la forme de part en part, ou encore 1 seul trou, les quatre « entrées » étant reliées à un trou central unique. Pourtant, le Rulpidon possède 3 trous. Pour s'en convaincre, il suffit de réfléchir à combien de fois il a fallu percer le Rulpidon. Trois fois ! En effet, en considérant que l'on fait un trou lorsque l'on traverse la matière jusqu'à rencontrer du vide, on perce une fois le Rulpidon de part en part, puis on le perce sur un autre côté jusqu'à rejoindre le vide créé par le premier trou, et enfin on le perce une troisième fois du côté opposé.



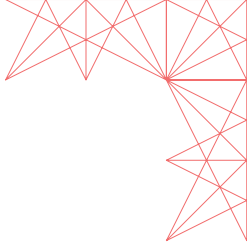
Il est possible d'arriver à la même conclusion en fabriquant un Rulpidon en pâte à modeler. En déformant la matière et en étirant de plus en plus l'une des ouvertures du Rulpidon, on peut obtenir une surface plate possédant trois trous, car l'ouverture que l'on a étirée est devenue le contour de notre forme.

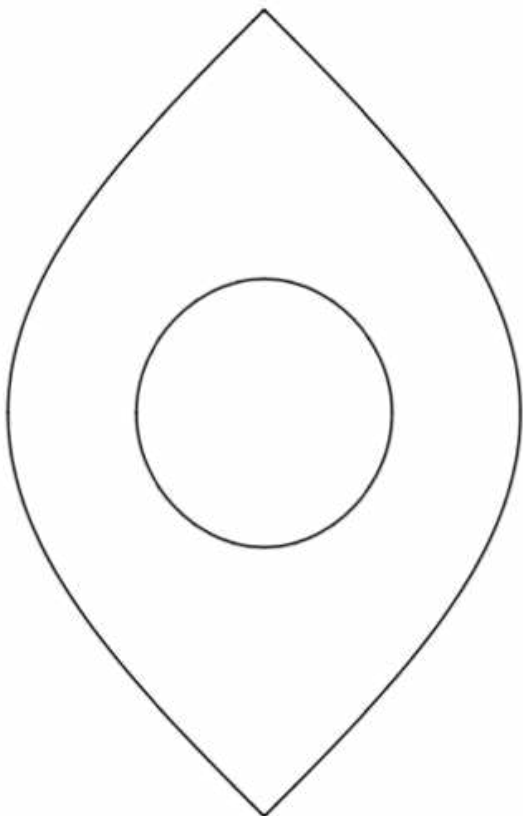
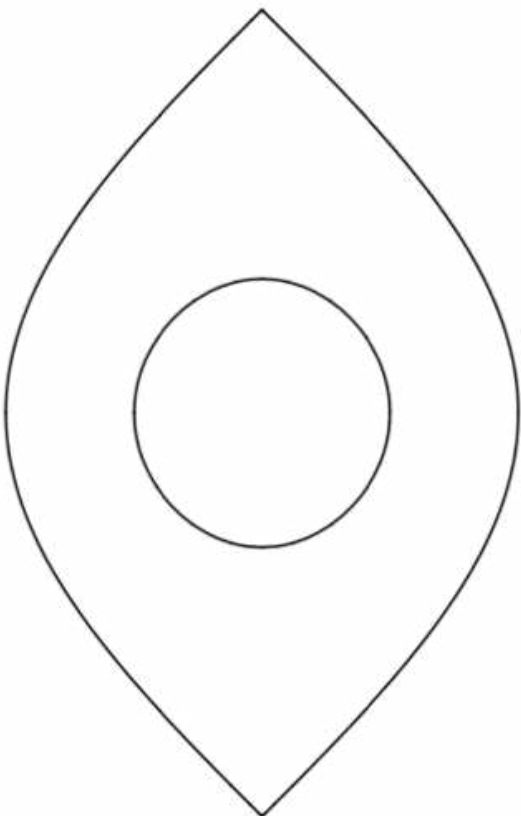
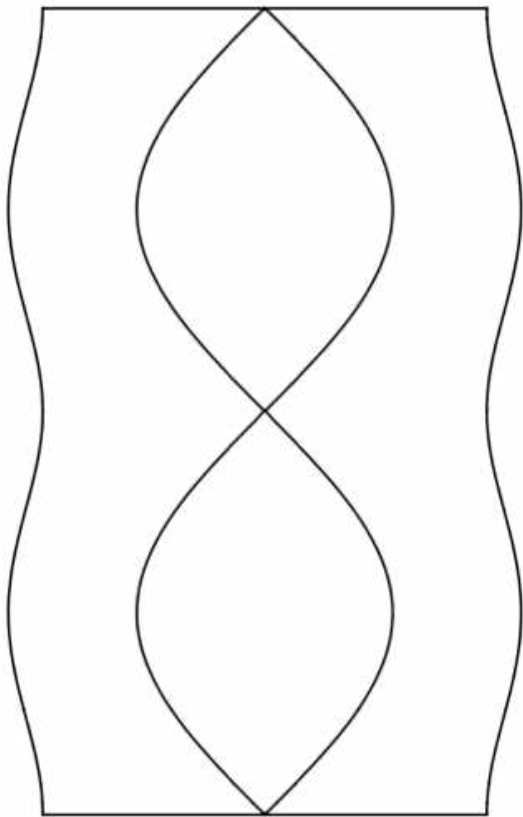
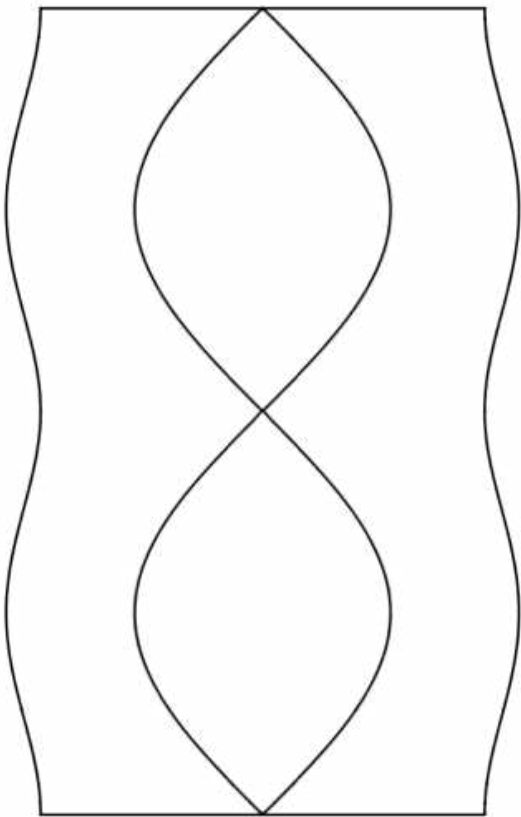
En **topologie**, la discipline des mathématiques qui s'intéresse aux propriétés des objets déformables, on dit que le Rulpidon est un objet de genre 3, car il a 3 trous. Le genre des objets en topologie est déterminé par le nombre de trous qu'ils ont. Le tore est un objet de genre 1 puisqu'il possède 1 trou, tandis qu'une sphère est un objet de genre 0, car elle ne possède pas de trou. Le genre d'un objet ne change pas si l'objet est déformé : on dit que le genre est un **invariant topologique**.

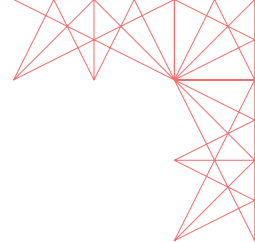
Maintenant que nous en savons un peu plus sur le Rulpidon, nous allons aussi essayer d'imaginer combien de couleurs on peut utiliser au maximum pour colorier une carte dessinée dessus ; à nouveau, on reformule le problème en se demandant combien de régions toutes frontalières les unes des autres on peut dessiner au maximum. Les élèves réfléchissent à une solution possible à l'aide des Rulpidons en papier.

Les élèves comparent les différentes solutions qu'ils ont imaginées, et le nombre de couleurs qu'ils pensent pouvoir utiliser. Le nombre maximum de régions mutuellement frontalières, et donc le nombre de couleurs suffisantes pour colorier une carte sur le Rulpidon est **9** (théorème généralisé disponible en annexe 3 pour l'enseignant).









Annexe 3. Complément pour l'enseignant

Le théorème généralisé

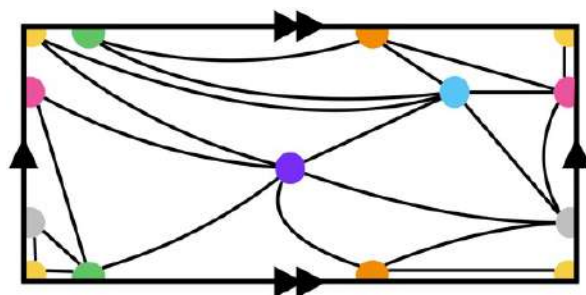
Sur d'autres surfaces que le plan ou la sphère on peut généraliser le théorème des quatre couleurs. Pour ce faire, il est nécessaire de préciser le concept de **genre d'une surface**, qui correspond intuitivement à son nombre de trous. Le genre est défini comme le nombre maximum de fois où l'on peut découper la surface par des coupes en forme de courbe fermée, sans que la surface s'en retrouve déconnectée (c'est-à-dire, sans qu'elle se casse en plusieurs morceaux). Par exemple, une sphère a genre 0 car il n'est pas possible de la couper selon une courbe fermée sans la rompre en deux. Un tore a genre 1 car il est possible de le transformer en « C » en le coupant le long d'un cercle perpendiculaire à son axe de symétrie central.

En fonction du genre de la surface, le nombre de couleurs suffisantes à colorier n'importe quelle carte tracée sur la surface (toujours à condition de ne pas avoir des régions en plusieurs morceaux et ne pas considérer des points comme des frontières) est donné par cette formule, conjecturée par le mathématicien britannique Percy Heawood en 1890 et prouvée en 1891 par le mathématicien allemand Lothar Heffer :

$$p = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48n}}{2} \right\rfloor$$

Où **p** est le nombre de couleurs recherchée, **n** le genre de la surface et les crochets signifient qu'on ne conserve que la partie entière du résultat.

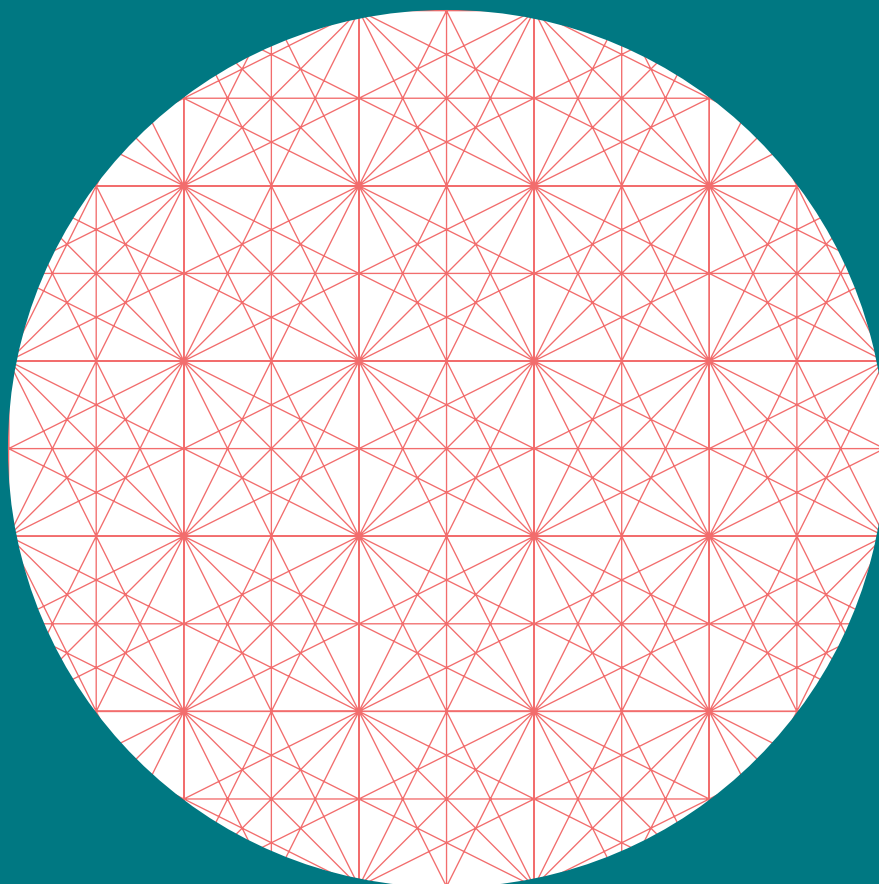
Pour la sphère, **n** vaut 0 et **p** vaut 4 (comme le dit le théorème des 4 couleurs).



Pour le tore, **n** vaut 1 et **p** vaut 7. Sept couleurs suffisent pour colorier n'importe quel graphe comme décrit ci-dessus.

De plus, comme sur l'exemple ci-contre, il existe des « graphes complets » à 7 sommets sur le tore, c'est-à-dire dont les 7 sommets sont connectés aux 6 autres.

Pour le Rulpidon, **n** vaut 3 donc **p** vaut 9. Il suffit donc de 9 couleurs pour colorier n'importe quel graphe dessiné sur un Rulpidon. De plus, il existe des graphes complets à 9 sommets sur le Rulpidon : ils sont beaucoup plus difficiles à imaginer et à tracer que les graphes complets à 7 sommets sur le tore.



Institut Henri Poincaré | Maison Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris

profs-maison-poincare@ihp.fr
01 44 27 64 73
maison-poincare.fr

