

Un paysage mathématique

16 septembre 2025



Préambule

Ce texte est un document d'accompagnement de l'affiche intitulée *Paysage mathématique*. Il est destiné aux mathématicien.nes professionnel.les, comme fil rouge pour commenter cette affiche dans des contextes de médiation scientifique, mais nous espérons qu'il est aussi lisible par un public intéressé. Les mathématiques décrites dans ce texte sont très loin d'être exhaustives. N'hésitez pas à nous envoyer votre contribution pour compléter ce document et l'enrichir collectivement !

Les mathématiques de notre paysage

Cette illustration éclaire la diversité des mathématiques, et leurs liens avec notre environnement. L'esthétique enfantine de l'image, similaire à un jeu de *cherche et trouve*, est un choix délibéré pour attirer l'attention d'un large public.

Les mathématiques sont intrinsèquement présentes dans la nature, comme en témoignent les formes géométriques des coquillages, des tournesols, des fougères, ainsi que les hexagones des nids d'abeilles. Inversement la nature est une source d'inspiration mathématique et a permis de développer des modèles comme par

exemple la dynamique prédateur-proie, le débit des rivières et la gestion des ressources. Le caractère aléatoire que l'on observe dans la nature, comme en dynamique des populations, a sa propre théorie mathématique. Le comportement de notre propre corps, la façon dont bouger nous modifie, la propagation des maladies et même la façon dont, dans le cerveau, le degré de dépolarisation d'un neurone prédit son taux de déclenchement, suivent tous des modèles mathématiques. Des modèles qui sont dans bien des cas, pas encore compris et au coeur de recherches modernes.

Les innovations humaines dans des domaines variés, comme les télécommunications, l'architecture, les transports et la production d'énergies renouvelables reposent largement sur des concepts mathématiques. Les mathématiques nous permettent non seulement d'observer l'invisible, que ce soit au moyen d'un télescope astronomique ou d'un microscope électronique, mais nous aide aussi à prédire l'inconnu grâce à l'apprentissage automatique. La richesse des mathématiques et la façon dont elles sont imbriquées dans notre environnement, même dans les aspects les plus fondamentaux de la discipline, sont reflétées dans cette illustration.

Ainsi, dans ce *Paysage mathématique*, l'accent n'est pas mis sur des concepts abstraits et rangés dans des cases différentes : l'analyse (intégrales, suites, équations différentielles, ...), la théorie des nombres (ou arithmétique), la géométrie (longueurs, angles, symétries, ...), la topologie (étude des déformations des objets mathématiques), les probabilités (mathématisation du hasard), les statistiques, l'algèbre, ...

Nous vous présentons ici un monde, notre monde et le vôtre, dans lequel les mathématiques les plus diverses sont omniprésentes. Ce sont ces mathématiques, au service des grands enjeux contemporains, démocratie, climat, santé, biodiversité, qui seront utiles aux générations futures, et que nous voulons promouvoir.

Conceptrices et concepteurs du projet : Indira Chatterji (Université Côte d'Azur), Hélène Guérin (Université du Québec à Montréal), Nathalie Krell (Université de Rennes 2), Sepideh Mirrahimi (CNRS - Université de Toulouse), Simon Modeste (Université de Montpellier), Barbara Schapira (Université de Montpellier), Nicolas Seguin (Inria - Université de Montpellier).

Illustratrice : Romane Charpentier.

Avec l'aide précieuse de : Amandine Aftalion (CNRS Université Paris-Saclay), Nina Aguillon (Sorbonne Université), Annabelle Collin (Université de Nantes), Eva Knoll (Université du Québec à Montréal), Elisa Lorenzo García (Université de Neuchâtel), Tommy Mastromonaco (Université du Québec à Montréal), Michèle Romanos (CNRS - Université de Lyon).

Table des matières

1	Les mathématiques, une science humaine	4
2	Notre planète	5
2.1	Le diamètre de la terre	5
2.2	La lunette astronomique sur la montagne	5
2.3	La chaleur	5
2.4	Par monts et par vaux	6
2.5	Le vent	7
2.6	Rivières, océans, vagues et tsunami	8
2.7	Météo et climat	10
2.8	L'arc-en-ciel	11
2.9	Tas de sable	11
3	Décrire le vivant mathématiquement	12
3.1	Des fougères et des fractales	12
3.2	La croissance du vivant et la suite de Fibonacci	13
3.3	Ancêtres et généalogie	14
3.4	Les oiseaux	14
3.5	Les abeilles	15
3.6	Les algues	15
3.7	La forêt	15
3.8	Dynamique des populations	16
4	Sport et santé	17
4.1	Imagerie médicale	17
4.2	Neurosciences	18
4.3	Course à pied	19
4.4	Jeux de ballons	19
5	Arts et jeux	19
5.1	Colin Maillard	19
5.2	Maths et musique	20
5.3	Perspective	21
5.4	Paradoxes	21
5.5	Pavages	21
5.6	Jeux de carte	22
5.7	Jeux de billes	22
5.8	Math et architecture	23
6	Des mathématiques pour se déplacer	24
6.1	Le vélo, la cycloïde	24
6.2	Trafic routier	24
6.3	Modélisation des flux de voitures grâce aux statistiques	25
6.4	Avions	25

7	Les maths pour transmettre de l'information	26
7.1	Ondes, télécom	26
7.1.1	Equation des ondes	26
7.1.2	Les antennes paraboliques	27
7.2	Informatique	27
7.2.1	Le monde en binaire	27
7.2.2	Algorithme et analyse numérique	28
7.3	Théorie des codes correcteurs d'erreurs	30
7.4	Cryptographie	31
8	Structures mathématiques	32
8.1	Surfaces	32
8.2	Présentation de groupes	33
8.3	Solides de Platon	33
8.4	Graphes, 4 couleurs	35

1 Les mathématiques, une science humaine

Les mathématiques ont souvent l'image d'une discipline froide, aride et pratiquée par quelques rares génies précoces et solitaires, en marge du monde réel. Les dictionnaires évoquent beaucoup l'abstraction, la logique, la rigueur, l'ordre. Ces définitions oublient que les mathématiques sont avant tout une aventure collective, ouverte à toutes et tous, qui a permis de compter des brebis, mesurer des clôtures, coudre des habits, réguler la circulation, ou encore évaluer l'efficacité de médicaments... Elles sont omniprésentes dans nos représentations du monde et dans les inventions humaines d'hier comme de demain.

Si les mathématiques ont servi à la conquête spatiale, à élaborer des codes secrets et des armes de guerre, à créer des bitcoins et à développer des intelligences artificielles énergivores, elles servent également à comprendre le vivant, le climat, à anticiper, soigner, protéger.

Loin du mythe du génie solitaire hors norme, les mathématiques sont surtout collaboratives, pratiquées par des femmes et des hommes ordinaires, de tous les âges, de tous les pays, qui travaillent en équipe, en essayant de faire leur part pour comprendre le monde et le rendre meilleur. Si l'histoire a surtout retenu des noms masculins, c'est parce que les femmes ont longtemps travaillé dans l'anonymat d'un groupe.

L'activité mathématique consiste à observer des situations, et à en dégager des structures, des motifs, des principes généraux, qu'il s'agit d'abord d'énoncer puis de démontrer de manière logique, avant de pouvoir les réutiliser dans d'autres contextes.

2 Notre planète

2.1 Le diamètre de la terre

Les rayons du soleil tracés au sommet du phare sont là pour nous rappeler qu’avec des mesures de ce type, il a été possible, il y a plus de 2200 ans, d’estimer très correctement le diamètre de la planète Terre.

Plus précisément, on mesure l’ombre faite par le soleil du haut d’un phare, d’une pyramide ou d’un bâton, dans deux villes distinctes, exactement à la même heure. L’ombre du soleil nous permet de mesurer l’angle entre les rayons du soleil et la verticale, en chacune des deux villes. Ensuite, si on connaît la distance entre les deux villes, un calcul trigonométrique de niveau collège permet de déduire le rayon (ou le diamètre) de la terre. Ce calcul est attribué à [Erathosthène](#), 200 ans avant JC.

2.2 La lunette astronomique sur la montagne

En 2000 ans les outils de mesure du monde qui nous entourent ont progressé. La lunette astronomique, familière des élèves de terminale, permet d’observer des étoiles lointaines, le ciel en général. Sur l’affiche, elle symbolise également notre ouverture sur le monde, sur un espace lointain et mystérieux.

La lunette astronomique est composée d’un long tube et de deux lentilles convergentes, alignées de sorte que le foyer image de l’une soit confondu avec le foyer objet de la seconde. La première lentille reçoit des rayons lumineux venus de l’espace lointain, et qui sont donc, en première approximation, parallèles. Ces rayons traversent la première lentille pour se concentrer au foyer image de l’autre côté. Ce foyer étant également le foyer objet de la seconde lentille, les rayons qui vont traverser la seconde lentille ressortiront parallèles. Les caractéristiques d’agrandissement des lentilles sont choisies de sorte qu’à la sortie, l’objet observé (une étoile par exemple) apparaîtra bien plus gros qu’à l’oeil nu.

Les calculs précis d’agrandissement font appel à des mathématiques de niveau secondaire, essentiellement basés sur le théorème de Thalès. Ces calculs familiers des élèves de spécialité physique-chimie relèvent de ce qu’on appelle l’*optique géométrique* : droites parallèles, rapports de proportionnalité, angles et trigonométrie. Les mathématiques sont un outil fondamental, pas forcément complexe, mais omniprésent, dans toutes les sciences et techniques.

2.3 La chaleur

L’*énergie thermique* est une forme d’énergie qui traduit l’agitation microscopique des atomes ou molécules qui constituent un objet, un liquide, un gaz. Cette énergie thermique est proportionnelle à la température du milieu considéré.

L’énergie thermique suit un principe de conservation : dans un volume donné, si on compare l’énergie thermique entre deux instants, la variation d’énergie doit être égale au flux de chaleur entrante/sortante entre ces instants. Si il y a des sources de chaleur, celles-ci viennent augmenter l’énergie thermique.

L'équation de la chaleur décrit l'évolution de la température d'un milieu, en fonction d'une constante κ , dite de *diffusivité thermique*, qui représente la capacité à diffuser de la chaleur du milieu.

Depuis un peu plus de deux siècles, la notion de variation est remplacée par la notion de dérivée, plus rigoureuse et calculable. Dans un système, la température T est une grandeur qui dépend de l'instant t et de l'endroit de l'espace qu'on considère, dont on note les coordonnées (x, y, z) . La variation de température au point (x, y, z) , est décrite par la dérivée de la température T par rapport à la variable de temps. Pour la distinguer des dérivées par rapport aux autres variables, on la note $\frac{\partial T}{\partial t}$ ou encore, de manière plus concise, $\partial_t T$. Le flux de chaleur, lui, est toujours dirigé des zones les plus chaudes vers les plus froides. Pour connaître sa direction, partant d'un point donné de coordonnées (x, y, z) , il faut donc connaître les variations de T dans l'espace autour de ce point, et la direction dans laquelle la température varie le plus. Ces variations sont données par la différentielle de T , et le vecteur appelé *gradient*, noté ∇T , indique la direction dans laquelle la température augmente le plus. Le flux de chaleur, qui va du plus chaud au plus froid, est dirigé par le vecteur opposé $-\nabla T$.

Finalement, en tenant compte des sources de chaleur S , on obtient l'équation suivante pour décrire l'évolution de la température dans le temps et dans l'espace :

$$\partial_t T - \operatorname{div}(\kappa \nabla T) = S.$$

Cette *équation de la chaleur* est une des équations (aux dérivées partielles) les plus connues et utilisées. Elle permet de décrire des phénomènes de diffusion dans de nombreux cas très différents.

La compréhension, et en fait l'établissement, de cette équation remonte à Joseph Fourier, au début du 19e siècle, qui a aussi donné son nom aux transformées de Fourier. Elle repose sur une description des solutions de l'équation par une somme infinie de fonctions oscillantes : *a priori* des sinus et des cosinus, mais en fait remplacés par la représentation polaire des nombres complexes. Ce point de vue a depuis fait florès, que ce soit pour l'analyse d'autres équations aux dérivées partielles, mais aussi en théorie de l'approximation, ayant par exemple mené aux formats de compression d'image tel le JPEG.

2.4 Par monts et par vaux

Les montagnes colorées sont l'occasion de présenter les problèmes d'optimisation. Dans une chaîne de montagnes, chaque point est à une altitude différente. Si vous êtes un randonneur ou une alpiniste, et que vous cherchez à atteindre le sommet, cela signifie que vous cherchez le point d'altitude maximale, et le meilleur chemin pour l'atteindre. Parfois, on peut se retrouver sur un petit sommet en pensant que c'est le plus haut, alors qu'il y a encore une montagne bien plus grande à côté — c'est ce qu'on appelle des *maximums locaux* par opposition à un *maximum global*. Il faut alors chercher encore, jusqu'à rejoindre le maximum global.

C'est exactement ce que l'on fait en optimisation : on essaie de trouver le *meilleur* point selon un certain critère — pour l'alpiniste, ce critère est l'altitude. Mais cela peut être autre chose : minimiser le coût d'une production, maximiser le rendement d'une culture, réduire le temps de trajet entre deux villes ou encore ajuster des paramètres pour obtenir le modèle mathématique le plus précis possible. Dans tous ces cas, on cherche à atteindre le *meilleur* point selon un critère précis.

Revenons à nos montagnes. Une skieuse qui souhaite s'arrêter sur une piste pour faire une pause mettra ses skis perpendiculairement à la pente. Inversement, si on souhaite descendre le plus droit possible vers la vallée, on ne marchera pas au hasard : en regardant autour de nous, on choisit toujours la pente la plus forte vers le bas. C'est exactement ce que fait la descente de gradient en mathématiques. (Attention, c'est très dangereux, ni les pistes de ski, ni les sentiers de randonnée ne font ça !)

Imaginons que l'altitude, c'est à dire la hauteur en un point, soit décrite par une fonction h dépendant des coordonnées (x, y) de ce point sur une carte. Le *gradient de cette fonction*, noté ∇h , est le vecteur qui indique la direction dans laquelle l'altitude augmente au plus vite. Pour descendre, on fait l'inverse : on suit la direction opposée au gradient.

Mathématiquement, si à un instant donné, disons t , vous êtes à la position (x_t, y_t) , l'algorithme de *descente de gradient* vous fait rejoindre la position suivante, à l'instant $t + 1$, ainsi :

$$(x_{t+1}, y_{t+1}) = (x_t, y_t) - \alpha \nabla h(x_t, y_t)$$

où α est un petit pas correspondant à la vitesse à laquelle vous avancez dans la direction de plus grande pente. Plus α est grand, plus vous descendez vite, mais attention à ne pas rater la vallée que vous cherchiez en allant trop vite !

Ce genre de méthode est utilisé partout : pour entraîner des intelligences artificielles, ajuster des modèles mathématiques aux données, ou même résoudre des problèmes de physique ou d'économie.

2.5 Le vent

Les éoliennes sont des dispositifs de transformation de l'énergie (cinétique) du vent en énergie électrique. L'énergie électrique issue des éoliennes est dite « renouvelable » car le vent peut être considéré comme inépuisable, contrairement au pétrole par exemple. Le terme est inexact car leur construction utilise du pétrole et des métaux rares qui ne sont malheureusement pas renouvelables, et leur exploitation nécessite de l'espace, qui n'est pas infini. Cela dit, elles sont tout de même très intéressantes, car elles contribuent à la réduction des émissions de gaz à effet de serre : en effet, seules les étapes de production et de destruction sont considérées comme polluantes du point de vue de l'empreinte carbone.

Les éoliennes posent de nombreux défis mathématiques. Le premier relève de la mécanique : quelle est la forme optimale d'une éolienne ? On souhaite

recupérer une part maximale de l'énergie cinétique du vent, qui est liée à sa vitesse, grâce aux pales de l'éolienne qui entrent en rotation. Les mathématiques interviennent alors pour aider à la conception, notamment grâce à la création de logiciels de simulation du vent et du mouvement des éoliennes. Cela fait appel à des connaissances poussées de modélisation en aérodynamisme car il faut comprendre l'interaction entre l'air et la structure, formée des pales et du mât.

Un autre aspect important dans la conception des éoliennes est l'optimisation de leur rendement. Leur placement, leur dimension, ainsi que leur nombre, ont une grande influence sur leur production d'électricité. Il s'agit donc de maximiser cette production, tout en minimisant plusieurs critères, comme leur coût de production et d'entretien, leur impact visuel et sonore sur leur environnement et les dommages aux espèces locales. Là aussi, des outils mathématiques viennent en aide pour déterminer le meilleur choix, ou plutôt le meilleur compromis.

Aujourd'hui, le développement de champs d'éoliennes offshore, en mer, ouvre de nouveaux défis, dans le développement de la robotique sous-marine, à l'aide de méthodes d'apprentissage mathématiques (deep learning, IA).

Une difficulté fondamentale posée par les énergies renouvelables est le problème de l'intermittence. Le vent ne souffle pas en continu, le soleil ne brille pas tout le temps. Par conséquent, la production d'électricité peut varier fortement en raison des paramètres météorologiques. Cette difficulté pourrait être résolue si on savait stocker efficacement l'électricité, mais ce n'est pas encore le cas. Là encore, les mathématiques sont mises à contribution pour optimiser l'utilisation de l'énergie à chaque instant, en fonction de la production, et contourner les difficultés de stockage.

2.6 Rivières, océans, vagues et tsunامي

La mécanique des fluides est un grand domaine de la physique qui fournit des modèles mathématiques décrivant les écoulements de fluides comme l'eau ou l'air, mais aussi le sable ou la neige d'une avalanche, en fonction des forces internes et extérieures subies.

Selon les phénomènes observés, les équations mathématiques peuvent être très différentes les unes des autres, mais elles prennent toutes la forme d'équations aux dérivées partielles. Ces concepts sont pour la plupart issus du principe de conservation : la variation temporelle d'une quantité physique q dans un volume V donné se déduit du flux associé à q , disons F qui traverse le bord du volume V , noté ∂V , à savoir

$$\frac{d}{dt} \int_V q(t, x) \, dx = - \int_{\partial V} F(t, x) \cdot n(x) \, dS(x)$$

où t et x sont les variables de temps et d'espace et $n(x)$ est le vecteur normal (unitaire) au point x du bord ∂V . Les symboles $\int_V \dots dx$ et $\int_{\partial V} \dots dS(x)$ signifient que l'on fait la somme des quantités en pointillées dans le volume V et sur la surface ∂V . Le signe $\int$ correspond à la lettre S , comme *summa* en latin, et a été introduit par Leibniz au XVII^e siècle. En faisant tendre le volume vers

un point x et en utilisant le théorème de la divergence, on réécrit la formule précédente comme

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div} F = 0$$

où div est l'opérateur divergence, qui contient des dérivées par rapport à la variable d'espace x . Du point de vue de la physique, les quantités Q (et les flux associés F) qui vérifient de telles équations sont nombreuses : la masse volumique, la quantité de mouvement, l'énergie... Dans le cas des rivières et des fleuves, on peut supposer que l'eau se déplace essentiellement horizontalement. Dans ce cas, les quantités conservées sont la hauteur de l'eau, $h(t, x)$, et le débit $hu(t, x)$, où u est la vitesse horizontale et $x = (x_1, x_2)$ sont les coordonnées horizontales, c'est-à-dire que toute la colonne d'eau se déplace à la même vitesse. Cette hypothèse de modélisation, vérifiée dans certaines situations, permet d'obtenir des équations simplifiées, appelées *équations de Saint-Venant*, qui sont plus simples à écrire et à étudier. Elles relient la hauteur d'eau et la vitesse de l'écoulement, et expriment la conservation de la quantité totale d'eau, ainsi que l'action des forces de pression dues à la gravité.

Les équations de Saint-Venant tiennent notamment compte de principes de conservation physiques. La conservation du volume d'eau mène à une première équation :

$$\partial_t h + \operatorname{div} Q = 0,$$

où $h(t, x, y)$ est la hauteur d'eau et $Q(t, x, y)$ est le flux d'eau (ou débit), à un instant t en un point de coordonnées spatiales horizontales (x, y) . On la complète grâce à la conservation du débit, qui mène à une seconde équation plus complexe. Ces équations permettent de décrire d'une part la vitesse horizontale de l'eau, qui est proportionnelle au débit, et d'autre part la vitesse des ondes que l'on voit à la surface. À partir de là, on peut distinguer différents régimes d'écoulement, que nous avons représentés sur l'affiche : si la vitesse horizontale est faible par rapport à la hauteur, alors on parle de régime fluvial, si par contre la vitesse horizontale est importante on parle de régime torrentiel. Les écoulements côtiers sont généralement fluviaux.

Si on s'intéresse aux vagues au large, l'hypothèse dite de pression hydrostatique sous-jacente dans les équations ci-dessus n'est plus valide et on utilise alors des modèles plus élaborés. Des analyses mathématiques fines sont alors nécessaires pour comprendre la validité de tel ou tel modèle, notamment basées sur une compréhension de la dépendance des solutions aux différentes échelles des phénomènes en jeu.

Par exemple, les tsunamis, aussi appelés raz-de-marée, sont des phénomènes dévastateurs qui peuvent se produire lorsqu'un séisme ou un glissement de terrain a lieu dans les fonds marins. De grands volumes d'eau sont alors déplacés brusquement. Cela crée une onde à la surface de l'océan, bien différentes des vagues dont on a l'habitude : elle ne fait que quelques dizaines de centimètre de hauteur en pleine mer, mais est large de plusieurs dizaines de kilomètres. Cette onde se déplace extrêmement rapidement et ne correspond pas du tout aux ondes que l'on peut observer en général au bord d'une plage ou à la surface

d'une rivière. À l'approche des côtes lors du passage sur le talus continental, moins profond, il y a un rétrécissement de la largeur du tsunami, qui s'accompagne de l'augmentation de sa hauteur. Des quelques dizaines de centimètres en haute mer, qui passent totalement inaperçu aux yeux des marins, on passe à de très puissantes et massives vagues de plusieurs mètres de haut.

2.7 Météo et climat

Les prédictions météorologiques sont d'une très grande importance économique et sociale, puisqu'elles permettent par exemple de mesurer les risques encourus par les populations (crues brutales, orages violents, risques d'incendies ou inondations, ...), mais aussi pour les marins (tempêtes), pour l'agriculture (gel, grêle, ensoleillement, pluviométrie), pour certaines industries et pour la production d'énergie (ensoleillement pour l'énergie solaire et vent pour l'éolien par exemple).

L'évolution de la température, de la pression et des vitesses du vent peuvent être décrites par des équations physiques appelées *équations aux dérivées partielles*. Ces équations relient les variations au cours du temps de ces grandeurs physiques à leurs variations dans l'espace : des différences de température entre deux zones peuvent créer du vent, le vent pousse les nuages et modifie donc les zones de pluies, etc.

Ce type d'équations est complexe et ne peut pas se résoudre à la main : on ne sait pas calculer leur solution précise à partir de la connaissance (par ailleurs parcellaire) de la météo un jour donné. C'est pour cela qu'on utilise des modèles météorologiques qui, grâce à la puissance de calcul d'un ordinateur, sont capables d'approcher les solutions et ainsi de fournir des prédictions sur quelques jours. Ce faisant, on passe d'un modèle continu (valable partout et tout le temps) à un modèle dit *discret* où la météo est calculée à intervalles réguliers sur un maillage, c'est-à-dire en un nombre grand mais fini de points. Les variations de la pression, de la température, de la vitesse du vent en chacun de ces points au cours du temps sont reliées à celles de leurs voisins, exactement comme dans le modèle de départ.

L'*analyse numérique* est le domaine des mathématiques qui permet de garantir que ce passage du continu au discret (ou du papier à l'ordinateur) engendre des erreurs contrôlées et que le résultat de l'algorithme reste proche de la réalité physique. Le *calcul scientifique* est la discipline à l'interface des mathématiques et de l'informatique qui s'occupe des manières les plus précises et rapides de coder les algorithmes sur les *centres de calcul*, d'énormes ordinateurs dédiés à la prédiction météorologique.

L'apparition de l'*intelligence artificielle*, c'est-à-dire de nouvelles méthodes numériques basées sur des outils statistiques très performants, comme l'*apprentissage profond*, donne de nouveaux outils mathématiques qui semblent très efficaces pour les prédictions météorologiques, même si elle fait craindre une perte de compétences chez les météorologues et une diminution du nombre de personnes spécialisées.

La prédiction de l'évolution du climat est elle aussi d'une immense importance pour l'adaptation des sociétés au dérèglement climatique. Les équations les décrivant sont assez proches de celles de la météo, mais les échelles changent : on passe de prédictions à l'échelle d'un pays sur quelques jours à des prédictions continentales ou mondiales sur des dizaines d'années. Dans ce cadre, l'océan a beaucoup plus d'influence que dans les prédictions météorologiques car il absorbe et restitue à travers le globe l'essentiel de l'excès de chaleur lié aux émissions de gaz à effet de serre. Là encore on s'appuie fortement sur des simulations numériques qui, en plus de l'atmosphère, prennent en compte l'évolution de l'océan, de la couverture végétale et de la glace. Les mathématiques interviennent aussi dans la compréhension de phénomènes physiques cruciaux comme le Gulf Stream dans les équations ou la recherche de nouveaux modèles pour décrire un climat en évolution.

2.8 L'arc-en-ciel

L'arc-en-ciel évoque les lois de l'optique géométrique, et en particulier les propriétés de réfraction et réflexion de la lumière.

Le phénomène se produit lorsque, souvent juste après une grosse pluie, le soleil revient dans une partie du ciel, et que nous lui tournons le dos pour regarder les nuages. Nous voyons alors les rayons lumineux après réfraction et réflexion dans les gouttes d'eau des nuages. La réfraction est le phénomène de déviation de la lumière lorsqu'elle passe de l'air à l'intérieur de la goutte d'eau, et la réflexion est le fait de rebondir à la surface de l'eau pour renvoyer la lumière. La lumière du soleil est composée d'ondes de différentes longueurs, chaque longueur correspondant à une couleur, un peu comme des vagues sur la mer, mais dans l'air. Deux longueurs d'ondes différentes se réfractent avec des angles différents sur les gouttelettes en suspension, ce qui a pour effet de décomposer les différentes couleurs de la lumière, et c'est ainsi que nous voyons les couleurs côte à côte et non superposées comme c'est le cas en l'absence de gouttelettes.

La différence des angles θ_1 et θ_2 que fait un rayon de lumière en changeant de milieu (donc en passant de l'air à l'eau ou vice-versa) est donné par les lois dite *de Snell Descartes*

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

où v_1 et v_2 sont les vitesses de la lumière, et λ_1 et λ_2 sont les longueurs d'ondes, dans les différents milieux.

2.9 Tas de sable

Les tas de sable sur la plage peuvent évoquer de nombreux champs de recherche. Par exemple, les problématiques d'écoulement dans les silos à grain.

Ici, le tas de sable que construit le personnage fait penser à une courbe de Gauss. On peut faire le parallèle avec la planche inventée par Sir Francis Galton

en 1889 qui permet de retrouver cette courbe. La planche de Galton est une planche verticale sur laquelle sont plantées sur la partie supérieure plusieurs lignes de clous espacés uniformément. Une bille que l'on laisse tomber à partir de la position centrale du haut de la planche, a par la suite la même probabilité d'aller à gauche et à droite de chacun des clous, pour chacune des rangées. Dans la partie inférieure de la planche sont collectées les billes en fonction de l'endroit où elles arrivent. Lorsque l'on fait tomber successivement plusieurs billes, on observe la quantité de billes qui sont arrivées proche de la position centrale du bas de la planche, celles qui sont parties plus à gauche, et celles qui sont parties plus à droite. Comme les billes ont autant de chance d'aller à gauche et à droite à chaque étape, la ligne formée par les billes en bas de la planche est symétrique par rapport au centre et on démontre qu'elle est exactement une courbe de Gauss, c'est-à-dire le graphe de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

où x représente la position d'une bille par rapport à la position centrale de la planche. Cette expérience illustre le théorème de Moivre-Laplace sur la convergence d'une loi binomiale vers une loi gaussienne, dont la première version a été démontrée en 1733.

On remarquera un second tas de sable à côté du tas que construit le personnage. Il prend peut-être le sable de ce second tas pour construire le premier, déplaçant donc du sable entre deux tas. La théorie des déblais et des remblais a été étudiée par Monge, en 1883, pour transporter de façon optimale un tas vers un autre. Elle s'est par la suite développée au 20ème siècle et la discipline a été nommée *transport optimal*. La recherche mathématique dans ce domaine est toujours très active, notamment en *machine learning*, en *intelligence artificielle* et en *statistique*. En machine learning, le transport optimal fournit un cadre robuste pour comparer les distributions de probabilité, ce qui est fondamental dans la reconnaissance d'images ou encore la génération d'images artificielles.

3 Décrire le vivant mathématiquement

3.1 Des fougères et des fractales

La fougère représentée dans le paysage est une fractale : chaque « feuille » est composée d'une grande tige principale, de laquelle partent des tiges plus petites, qui ressemblent à la grande tige, à une échelle plus petite. De chacune de ces tiges part une plus petite tige, et ainsi de suite.

Le monde qui nous entoure regorge de fractales. Les côtes de Bretagne sont fractales, ce qui leur permet probablement de mieux résister à l'érosion lors des tempêtes fréquentes. La surface d'un chou romanesco est également fractale. Nos poumons sont fractals, ce qui permet de maximiser la surface de contact entre l'intérieur des poumons et les vaisseaux capillaires, et donc de mieux oxygéner le sang.

La théorie des fractales est née dans les années 1960, avec Benoit Mandelbrot qui s'intéressait à des problèmes d'économie et de finance. Il a observé des courbes qui modélisaient les variations de quantités très volatiles (c'est-à-dire qui varient très souvent et très fortement), comme la valeur d'une action cotée en bourse.

Il a alors développé la notion de *fractale*. Une fractale est un objet mathématique ou naturel qui est *autosimilaire*, c'est-à-dire qui a la même forme à différentes échelles de taille, et qui est également très irrégulier, ce qui se mesure par un outil, la *dimension fractale*. Les fractales ont le plus souvent des dimensions non entières, contrairement à une droite et une ligne qui sont dimension 1, ou un plan et une surface qui sont de dimension 2. Une fractale de dimension entre 1 et 2 est plus complexe qu'une ligne et en général moins pleine qu'une surface. L'exemple des fractales est emblématique de l'activité mathématique. Quelqu'un observe le monde (au départ ici, le monde de la finance) et essaie de comprendre et de décrire ces phénomènes compliqués. Une théorie mathématique se développe alors, dans le cas présent les fractales. Une fois bien comprise et digérée, la théorie devient un nouvel outil pour décrire des choses totalement différentes comme des légumes, et peut servir à construire des murs anti-bruit, à détecter le cancer, et inspirer les artistes !

Les oeuvres d'art utilisant des fractales sont nombreuses. Citons par exemple l'oeuvre contemporaine [Femme fractale de Nathalie Straseele](#). On trouve des fractales avant qu'elles n'aient été nommées dans des peintures très connues comme [Le visage de la guerre](#) de Dalí, ou encore [la grande vague de Kanagawa](#) de Hokusai, ainsi que dans les peintures de Jackson Pollock.

3.2 La croissance du vivant et la suite de Fibonacci

En sciences, ou dans la vie courante, on essaie fréquemment de suivre l'évolution de phénomènes au cours du temps : on peut suivre une trajectoire au fil du temps, ou encore l'évolution de la température d'un malade, de la pression atmosphérique, du prix au mètre carré dans l'immobilier, ... A chaque instant t , on mesure donc une grandeur $u(t)$ (position, température, pression, prix, ...)

En pratique, on ne mesure pas ces grandeurs à chaque instant, mais plutôt une fois par jour, tous les mois, ou toutes les minutes, toutes les secondes... Le temps est alors représenté par les entiers $n \in \mathbb{N}$, et la grandeur qu'on suit au fil du temps devient une suite de nombres $u(0)$ (à l'instant 0), $u(1)$ (à l'instant 1), $u(2)$, et ainsi de suite. On parle de *suite numérique*.

Dans le paysage, le tournesol et le gros coquillage illustrent l'importance dans la nature de la suite dite *de Fibonacci*. Mathématiquement, à l'instant n , la valeur $u(n)$ de la suite est la somme des deux précédentes $u(n-1)$ et $u(n-2)$. On décide par exemple que les deux premières valeurs sont 0 et 1. Les suivantes sont alors 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Il se trouve que cette suite apparaît régulièrement dans le vivant. Par exemple, lorsqu'une fleur de tournesol grandit, chaque nouvelle rangée de pétales grandit de sorte que chaque nouveau pétale se place là où, peut-être, il captera le mieux la lumière ou aura le plus de place, dans l'interstice entre les pétales des deux

précédents. Par construction, le nombre de pétales de la rangée n est donc la somme des nombres de pétales des deux rangées précédentes.

Les mécanismes de croissance de certains coquillages, les nautilus, font apparaître une spirale logarithmique, dont les proportions de croissance sont données par la suite de Fibonacci. Ce n'est certainement pas un hasard, et cela vient certainement des processus biologiques à l'œuvre lorsque l'animal à l'intérieur agrandit sa coquille.

3.3 Ancêtres et généalogie

La phylogénie est une science qui étudie les liens entre les différentes espèces au cours de l'évolution. Elle repose sur des outils mathématiques comme les probabilités et les statistiques. L'un des concepts-clés est celui de la coalescence, qui modélise la recherche des ancêtres communs à plusieurs espèces. Il s'agit par exemple de suivre l'évolution de tous les allèles d'un gène donné de tous les individus d'une population, jusqu'à une seule copie ancestrale, appelée ancêtre commun le plus récent. Les relations d'hérédité entre les allèles sont représentées sous la forme d'un *arbre phylogénétique*, comme celui imaginé par le personnage regardant le lapin.

Ainsi, en comparant les séquences d'ADN de différentes espèces, on peut estimer le moment où elles se sont différenciées d'un ancêtre commun. Les probabilités permettent de modéliser les mutations génétiques et d'estimer la vraisemblance des arbres phylogénétiques, qui représentent ces relations. Les statistiques, quant à elles, aident à analyser les données collectées pour valider ces modèles. La géométrie enfin permet de comprendre la structure derrière l'ensemble de tous les arbres phylogénétiques et d'imaginer de nouveaux algorithmes pour les étudier. Ces outils sont essentiels pour comprendre l'histoire de la vie sur Terre et retracer les grandes étapes de l'évolution.

3.4 Les oiseaux

Le vol des oiseaux au-dessus de la mer est l'objet d'études mathématiques captivantes. Une branche de mathématiques appliquées cherche à modéliser les règles d'interactions locales entre les individus (telles que l'attraction, la répulsion ou l'alignement) et à comprendre comment ces interactions purement locales aboutissent à un mouvement collectif coordonné. Ce phénomène est par exemple observé dans les déplacements des bancs de poissons, les vols d'oiseaux, ou même les foules humaines. Dans le *modèle de Vicsek*, dont les équations sont écrites sur le paysage, un groupe d'agents se déplace selon des règles simples de voisinage et d'alignement de direction, ce qui peut produire des mouvements cohérents à l'échelle macroscopique. Ce type de modélisation a des applications dans des domaines variés comme le comportement animal en biologie, les études de foule et les transports. Grâce à ces modèles, non seulement on peut comprendre ces phénomènes complexes mais aussi prévoir et optimiser des comportements collectifs dans des situations réelles.

3.5 Les abeilles

Les alvéoles d’une ruche sont remarquables par leur forme hexagonale parfaite. L’hexagone est la meilleure figure géométrique, parmi celles qui permettent à la fois de *paver le plan*, c’est-à-dire le remplir par des copies de la même forme collées les unes aux autres sans laisser de vide, et de *minimiser* la quantité de cire nécessaire pour construire les parois. En termes mathématiques, cela signifie que l’hexagone est la forme qui offre le meilleur rapport surface/périmètre parmi les figures régulières qui se collent les unes aux autres dans un plan. Cela minimise l’effort des abeilles pour produire de la cire tout en maximisant la capacité de stockage du miel et du pollen dans chaque alvéole. Cette propriété, connue sous le nom de *conjecture de l’hexagone* ([prouvée en 1999](#)), illustre comment les êtres vivants, sans calculs explicites, peuvent évoluer vers des solutions optimales, dont le caractère optimal peut être souvent démontré par les mathématiques. La ruche est ainsi un exemple fascinant de l’efficacité géométrique dans le vivant.

3.6 Les algues

Certaines algues ont des propriétés intéressantes pour dépolluer l’eau. D’autres sont de bonnes candidates pour fournir du biofuel pouvant servir de carburant. Cela incite à passer de l’échelle du laboratoire à l’échelle industrielle, en construisant des procédés de culture des algues les plus efficaces possibles. Qu’on choisisse de les cultiver en biofilm ou directement en bassin, il faut trouver le juste équilibre entre l’exposition à la lumière nécessaire à la croissance des algues, et repos à l’ombre pour éviter la photoinhibition, une sorte de coup de soleil dont elles récupèrent lentement. Cela peut s’étudier avant de se lancer dans la construction du dispositif grâce à l’optimisation. On commence par décrire comme les algues prolifèrent grâce à des équations mathématiques établies par les biologistes. Ces modèles ont plusieurs paramètres qui décrivent la forme du dispositif envisagé, par exemple l’intensité de l’éclairage, la proportion de temps passée dans l’ombre ou l’endroit où l’on injecte la nourriture. On explore ensuite grâce à un ordinateur quels sont les meilleurs choix en maximisant production d’algues et en prenant en compte les contraintes de construction, y compris le coût énergétique du dispositif. Si le dispositif sélectionné est prometteur, le projet se poursuit avec sa construction.

3.7 La forêt

En mathématiques, les arbres peuvent représenter différentes choses. On peut par exemple faire un lien avec la généalogie. La racine de l’arbre est l’ancêtre, chaque noeud représente les descendants dans une famille et plus on monte dans l’arbre plus on va vers les générations récentes. Les feuilles représentent alors les individus actuellement en vie dans la population. Les arbres représentés dans l’affiche sont principalement binaires, c’est à dire qu’à chaque génération une branche se sépare en deux, un individu donne ainsi naissance à deux enfants. On

peut imaginer que ce nombre d'enfants soit aléatoire, que chaque individu puisse avoir 0, 1, 2, ... enfants selon certaines probabilités. Une question importante en dynamique des populations est de savoir si la population peut s'éteindre, c'est-à-dire s'il existe un moment où il n'y a plus aucun individu. On se demande alors quelles sont les conditions pour éviter l'extinction d'une espèce. Dans un contexte particulier de reproduction, on démontre mathématiquement ce qui est intuitivement évident : si le nombre moyen d'enfants par individu est strictement plus grand que 1 alors la population peut exploser, et si ce nombre moyen est strictement inférieur à 1 la population va de façon certaine s'éteindre. Étonnamment, on démontre que si le nombre moyen d'enfant par individu est égal à 1, alors la population va s'éteindre de façon certaine, mais en général l'instant d'extinction sera très grand.

3.8 Dynamique des populations

La dynamique des populations est une branche des mathématiques qui s'intéresse aux variations de nombre d'individus d'une population donnée en interaction avec son environnement, ou avec d'autres populations.

Dans le paysage, c'est par exemple illustré par l'interaction entre le lapin et le renard. Les lapins sont des proies savoureuses pour les renards. S'il y a beaucoup de lapins, les renards vont pouvoir se nourrir facilement, et leur population va croître. Au contraire, plus les renards sont nombreux, plus les lapins sont menacés, mangés et moins ils vont se reproduire. Leur population va donc diminuer. Du coup, au bout d'un moment, les renards n'auront plus assez à manger. La vie devenue difficile, ils vont mourir de faim et moins se reproduire. Petit à petit, leur population va diminuer. Mais alors, la pression sur les lapins va diminuer. Leur population va donc à nouveau augmenter. Et ainsi de suite...

Cette évolution couplée des populations de lapins, *les proies*, et de renards, les *prédateurs*, avec ces cycles qui se répètent de croissance/décroissance de chaque population, est bien décrite par des paires d'équations différentielles, ou de suites récurrentes. C'est le modèle *proie-prédateur*, le plus célèbre sans doute en dynamique des populations (aussi appelé Lotka-Volterra).

Dans le paysage mathématique, la dynamique des populations est aussi symbolisée par le bateau de pêche. Les modèles mathématiques jouent un rôle crucial pour gérer durablement les ressources halieutiques et prévenir les risques liés à la surpêche. Ces modèles permettent d'analyser l'évolution des populations de poissons en fonction de divers facteurs, comme le taux de reproduction ou les pressions de pêche. Ils aident à établir des stratégies de gestion optimales pour limiter les prélèvements tout en assurant la survie des espèces. Des scénarios simulés peuvent ainsi guider les politiques, par exemple en fixant des quotas de pêche ou en définissant des périodes de repos biologique. Ces outils sont particulièrement importants pour préserver la biodiversité marine, tout en répondant aux besoins alimentaires des populations dépendantes de la pêche, notamment dans les pays en développement.

Une notion très importante en dynamique des populations est celle d'équilibre stable. Les modèles mathématiques permettent de relier les variations de la population en fonction du temps avec différents paramètres comportementaux, environnementaux. . . Si les paramètres varient peu, on peut s'attendre à ce que la population elle aussi varie peu autour d'un équilibre donné. Cependant, en cas d'épisodes particuliers, une canicule, une maladie ou l'arrivée d'une espèce invasive par exemple, certains paramètres peuvent varier très fortement et la population étudiée peut atteindre un nouvel équilibre stable, mais de valeur très différente de l'équilibre initial. Cela peut conduire à de très fortes déstabilisations de l'écosystème. Par exemple, la tordeuse du bourgeon de l'épinette, qui est une chenille se régaland des bourgeons des conifères, provoque des ravages sur les forêts canadiennes. On peut voir en fond un arbre mort dans le paysage. Avec une modélisation fine de la dynamique de la population de ces espèces nuisibles, on peut remarquer qu'il n'est pas nécessaire de les éradiquer complètement en cas d'épidémie. En effet, s'il est possible de modifier temporairement certains des paramètres du modèle, on peut espérer après un certain temps recouvrer l'équilibre initial, acceptable pour l'écosystème.

4 Sport et santé

Les mathématiques sont des outils très importants au service de notre santé : pour concevoir et utiliser des instruments de diagnostic (électrocardiogramme, IRM, radiographie, ...), pour améliorer les dépistages, interpréter des résultats, mesurer l'efficacité de médicaments ou vaccins, découvrir des risques sanitaires.

4.1 Imagerie médicale

Dans la première fenêtre en haut à gauche, on modélise pour mieux comprendre : lorsqu'on cherche à comprendre comment évoluent certains phénomènes biologiques, comme la croissance d'une tumeur ou d'un tissu biologique, on commence par les traduire en langage mathématique, sous forme d'équations. L'équation sur l'affiche décrit comment un tissu, composé de cellules qui se divisent, évolue au fil du temps.

Comment visualiser ces changements ? C'est là qu'intervient l'ordinateur ! Grâce à un *schéma numérique*, on transforme ces équations en un langage compréhensible par l'ordinateur. Cela nous permet de simuler différents scénarios et d'explorer des questions comme : Que se passerait-il si les cellules arrêtaient de se diviser ?

Dans la fenêtre du milieu, un médecin analyse un électrocardiogramme (ECG), il observe une courbe qui représente l'activité électrique du cœur. Mais comment peut-on extraire des informations précises à partir de ce signal ? C'est ici que la *transformée de Fourier* entre en jeu.

Un signal ECG est une combinaison de plusieurs variations électriques qui se produisent à différentes fréquences. La transformée de Fourier est une méthode mathématique qui permet de *décomposer* ce signal en une somme d'ondes

plus simples (appelées *sinusoïdes*), chacune ayant une fréquence et une intensité spécifiques.

Grâce à cette transformation, les médecins et les ingénieurs biomédicaux peuvent :

- identifier des anomalies dans le rythme cardiaque, comme une arythmie
- filtrer les bruits parasites pour améliorer la qualité du signal
- diagnostiquer plus précisément certaines maladies du cœur.

Ainsi, la transformée de Fourier est un outil puissant qui permet de mieux comprendre les signaux biologiques et d'améliorer les analyses médicales. Derrière chaque courbe ECG, il y a des mathématiques au service de la santé !

Dans la dernière fenêtre en bas à gauche, on voit une radiographie des poumons, qui est une image en deux dimensions d'un corps en trois dimensions. Mais comment cette image est-elle obtenue à partir des rayons X ? C'est ici qu'intervient une autre transformation, la *transformation de Radon* !

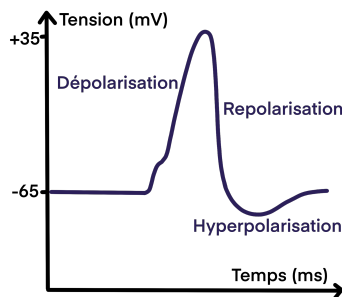
En imagerie médicale, les rayons X traversent le corps et sont absorbés différemment selon les tissus (os, muscles, poumons. . .). Les capteurs enregistrent ces variations et grâce à la transformation de Radon, on peut reconstruire l'image de l'intérieur du corps en utilisant des projections.

Cette technique est essentielle non seulement pour les radiographies, mais aussi pour les *scanners*, qui utilisent plusieurs images sous différents angles pour créer une vision complète du corps humain en trois dimensions.

Ainsi, derrière chaque image médicale, il y a des mathématiques qui aident les médecins à mieux voir et comprendre ce qui se passe dans le corps humain !

4.2 Neurosciences

Les neurones de notre système nerveux communiquent entre eux grâce à un signal électrique qui se propage le long de leur axone. Ce signal électrique particulier, appelé potentiel d'action, est caractérisé par une dépolarisation (augmentation du voltage) rapide, suivie d'une hyperpolarisation (baisse du voltage), avant de retrouver son potentiel de membrane au repos. Ces changements de voltage sont dû aux mouvements des ions qui entrent ou sortent du neurone. Ces variations peuvent être décrites mathématiquement à l'aide du [modèle de Hodgkin-Huxley](#), qui repose sur un système d'équations différentielles non linéaires. Ce modèle représente le neurone sous la forme d'un circuit électrique composé de résistances et d'une capacité (constante qui reflète les propriétés d'imperméabilité de la membrane du neurone). Les résistances incluent celle du neurone au repos, ainsi que les conductances ($g = 1/R$) des canaux ioniques.



4.3 Course à pied

Quand on court, on ne fait pas cela comme un robot. Certes il y a le mouvement des jambes (et des bras), mais l'être humain a un coeur et un cerveau. Le coeur aide à transformer l'oxygène de l'air en énergie, tandis qu'une autre partie de l'énergie des muscles vient de l'alimentation. C'est en revanche le cerveau qui donne l'instruction au muscle de produire un effort, et cet effort est lié à la motivation ou la fatigue. L'énergie, l'effort et la course, tout cela peut se mettre en équations pour analyser et prédire la performance en fonction de chaque individu. Pourquoi court-on bras pliés que bras tendus ? pourquoi le sprinteur ralentit-il avant la ligne d'arrivée ? Pourquoi vaut-il mieux être derrière quelqu'un ? Vous trouverez quelques réponses plus précises dans l'exposition [Pourquoi est-on penché dans les virages?](#) ou encore dans le [livre](#) associé.

4.4 Jeux de ballons

Le ballon posé près des enfants ne demande qu'à être lancé. La loi fondamentale de la dynamique, le champ de gravitation sont des notions très familières des élèves de spé physique au lycée. On y apprend que la trajectoire d'un ballon, d'une balle de tennis est une *parabole*, la courbe dessinée sur le sable, et la même courbe qui paraît sur le toit de la maison médicale.

5 Arts et jeux

5.1 Colin Maillard

Les marches aléatoires et le mouvement brownien sont des outils mathématiques puissants pour modéliser les trajectoires aléatoires, comme celles des particules en suspension ou des individus se déplaçant au hasard. Un exemple simplifié est celui du jeu du "Colin Maillard", où un joueur avance ou recule d'une case à chaque tour selon le résultat d'un tirage aléatoire. Cette modélisation permet de comprendre des phénomènes variés comme la diffusion des molécules dans un liquide ou la marche d'un animal cherchant sa nourriture.

En augmentant le nombre d'étapes du jeu, on observe que la position du joueur suit une distribution de plus en plus proche d'une loi normale, ce qui

illustre un résultat fondamental des probabilités : le théorème central limite. Lorsqu'on passe d'un modèle discret à un modèle continu, la marche aléatoire converge vers un processus appelé mouvement brownien, découvert par un botaniste et formalisé mathématiquement par Norbert Wiener. Ce modèle est utilisé en physique pour décrire les mouvements de particules microscopiques, en finance pour simuler l'évolution des prix des actifs, et en écologie pour étudier le déplacement des animaux dans leur environnement. Grâce à ces outils probabilistes, on peut analyser des trajectoires complexes et mieux comprendre les dynamiques sous-jacentes des systèmes aléatoires.

5.2 Maths et musique

Dans le paysage, on peut apercevoir une personne adossée à arbre qui joue de la musique. Les instruments mélodiques produisent des notes que l'on différencie par leur fréquence : une note aiguë est de fréquence supérieure à une note grave. La relation entre la hauteur des notes est mesurée par le rapport entre les fréquences. Par exemple, le *La* de fréquence 440 Hz et le *La* à 880 Hz ont un rapport de 2. Ce rapport, l'*octave*, est si pur à l'oreille que l'on attribue le même nom aux deux notes. Pour simplifier, supposons que le *Do* est de fréquence 1. De ce fait, les puissances de 2 (soit les notes 2, 4, 8, etc.) sont toutes des *Do*. Quelles sont alors les fréquences, entre 1 et 2, des onze autres notes formant l'échelle chromatique ?

Les intervalles dont la fréquence relative entre les notes est un nombre entier ont tendance à être consonants. Ainsi, les deux intervalles les plus purs après l'octave sont la *quinte* de fréquence 3 et la *tierce* de fréquence 5. En les diminuant d'une et deux octaves, leur fréquence devient respectivement $\frac{3}{2}$ et $\frac{5}{4}$.

Pythagore avait découvert que l'on peut construire les douze notes de l'échelle chromatique à partir du *Do* de fréquence 1 par quintes successives (pour former le *cycle des quintes*). La quinte du *Do*, de fréquence $\frac{3}{2}$, produit une nouvelle note, le *Sol*. La quinte du *Sol*, de fréquence $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$, est une autre note, le *Ré*. En continuant ainsi, on forme un total de douze notes uniques avant de retomber sur un *Do* après la douzième itération, c'est-à-dire sur la note de fréquence $(\frac{3}{2})^{12} \approx 129.75$. Ce nouveau *Do* est 7 octaves au-dessus du *Do* de départ ; il est donc de fréquence $2^7 = 128$.

Nous avons toutefois un problème, puisque ces deux fréquences sont très proches, mais pas égales. En raison de cette différence, il est impossible de créer un accordage de telle sorte que tous les intervalles soient purs : tout accordage est alors *imparfait*, et doit faire des compromis sur la pureté de certains intervalles (un tel système est appelé tempérament). De nombreux tempéraments ont été utilisés au cours de l'Histoire, certains favorisant la justesse des tierces, ou d'autres des quintes, au détriment d'autres intervalles sonnait alors très faux.

Depuis le 18^e siècle, la musique occidentale préfère le *tempérament égal en 12 demi-tons*, qui subdivise l'octave en 12 demi-tons dont le rapport entre chaque demi-ton consécutif est égal. Ce rapport vaut $\sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}} \approx 1.0595$, de telle sorte que le produit successif de 12 demi-tons donne bien l'octave, de rapport égal à 2. Dans ce tempérament, la quinte équivaut à un intervalle de 7 demi-

tons, donc de fréquence $2^{\frac{7}{12}} \approx 1.4983$, et la tierce à 4 demi-tons, de fréquence $2^{\frac{4}{12}} \approx 1.2599$: ce qui est très proche des intervalles purs $\frac{3}{2}$ et $\frac{5}{4}$. La popularité de ce tempérament provient du fait que tous les intervalles y sont (presque) purs, donc sonnent *assez justes*.

5.3 Perspective

A l'école, nous avons sagement appris que deux droites sont soit parallèles, soit sécantes, et que les droites parallèles ne se coupent jamais.

La nappe de pique nique nous rappelle ici les [règles](#) de la perspective, que les élèves des filières artistiques connaissent bien. Les droites parallèles se coupent ... en un *point de fuite*, loin vers l'horizon. Les règles de la perspective ont été formalisées par le mathématicien Girard Desargues, au 17ème siècle, qui est également l'un des précurseurs de la géométrie projective. Précisément, en géométrie projective, on ajoute à l'espace ambiant des *points à l'infini*, qui sont exactement toutes les directions possibles des droites. Ainsi, en géométrie projective, toutes les droites s'intersectent !

Aujourd'hui, dans le monde de la recherche mathématique, ces espaces projectifs sont des outils de base en géométrie.

5.4 Paradoxes

La compréhension des règles de la perspective a très vite amené son lot de détournements et d'illusions d'optique. A côté de la nappe de pique nique, le [cube impossible](#) semble être là pour nous énerver ! Pour aller plus loin, on peut s'émerveiller encore et toujours devant les oeuvres artistiques d'[Escher](#), très inspirées par les mathématiques.

La [bouteille de Klein](#), à côté de la nappe de pique nique, n'est qu'un paradoxe apparent. Cette bouteille n'a ni intérieur, ni extérieur, ce qui contredit notre intuition de ce qu'est une bouteille. En réalité, une telle bouteille ne peut exister dans notre espace à trois dimensions. Il faut une quatrième dimension pour que le goulot et le culot de la bouteille puissent se rejoindre sans avoir à traverser une paroi.

5.5 Pavages

L'allée menant à la maison médicale a un beau pavage mathématique très symétrique. Un *pavage* du plan est une façon de carrelers le plan de manière régulière, avec les mêmes carreaux, ou *motifs*, qui vont se répéter à l'infini. Le pavage est dit *régulier* lorsqu'il y a un seul motif, qui se répète toujours de la même manière.

Un pavage (du plan) est dit *périodique* si on peut le déplacer sur lui-même. Bien sûr, les carrelages de salle de bains sont faits avec des carreaux carrés ou rectangulaires. Mais vous pourriez paver votre salle de bains avec des triangles équilatéraux, avec des pentagones bien choisis, en faisant des motifs, qui seront répétables à l'infini ou pas, selon que le pavage est périodique ou pas.

Un pavage périodique aura un *groupe des isométries* (voir Section 8.2), qui est l'ensemble de déplacements du plan dont on aura besoin pour décrire tout le pavage à l'aide d'une tuile. Ces groupes appartiennent à la famille des *groupes cristallographiques*, qui sont des déplacements dans l'espace, et dont les tuiles en dimension 3 se retrouvent dans les cristaux dans la nature.

On peut montrer qu'il existe exactement **17 façons** distinctes de paver le plan avec un seul motif. Les Arabes qui ont construit le palais de l'**Alhambra** à Grenade les y ont tous représentés.

Le **premier pavage apériodique avec une seule tuile** a été publié en 2023.

5.6 Jeux de carte

Combien de fois faut-il mélanger un jeu classique à 52 cartes pour qu'il soit considéré comme bien mélangé ? Est-ce qu'il existe une façon de battre les cartes qui serait la plus efficace, dans le sens qui nécessiterait le moins de manipulations ? C'est Persi Diaconis, un magicien professionnel devenu mathématicien, et ses collaborateurs qui ont étudié et résolu cette question. On dit qu'un jeu de cartes est bien mélangé si une carte, par exemple la dame de coeur, a autant de chance d'être au dessus du paquet, au milieu, à la fin : si elle peut se retrouver sans préférence à n'importe qu'elle place du paquet de cartes. Pour un jeu ne contenant que 2 cartes, la dame de coeur peut être soit la première carte, soit la deuxième, et l'autre carte prendra automatiquement la position qui reste. Il y a donc deux places possibles pour la dame de coeur et si on considère toutes les cartes, il n'y a que 2 configurations possibles. Si le jeu contient 3 cartes, la dame de coeur a 3 positions possibles (en haut, au milieu, en bas), il ne reste alors que deux places pour la seconde carte, et la dernière carte prendra la dernière position disponible. Par conséquent, la dame de coeur a 3 positions possibles, et le jeu peut-être ordonné de $3 \times 2 \times 1$ façons possibles. Si on a n cartes, alors la dame de coeur a n choix pour sa position dans le jeu, et il y a $n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ façons d'ordonner toutes les cartes. En mathématique, la quantité $n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ est notée $n!$. Il y a plusieurs façons de mélanger un jeu de cartes : on peut prendre la carte au dessus du paquet et l'insérer au hasard à l'une des n places possibles, on peut séparer le paquet en deux, pas forcément en son milieu, et intercaler les cartes de chaque paquet (appelé mélange à l'américaine), etc. A la question de combien de fois faut-il répéter ces actions pour que le jeu soit considéré comme bien mélangé, le magicien et ses collaborateurs ont démontré que avec le premier type de battage pour un jeu de $n = 52$ cartes, il faudrait répéter le procédé environ $n \ln(n) \simeq 205$ fois. Avec le battage à l'américaine, il faudrait répéter le procédé seulement 7 fois pour obtenir un jeu quasiment bien mélangé.

5.7 Jeux de billes

L'enfant qui joue à lancer deux billes de manière presque identique observera certainement que les deux billes suivront une trajectoire presque identique.

En revanche, s'il avait joué à lancer ses deux billes sur une selle de cheval, par exemple de l'arrière vers l'avant, il aurait probablement observé au contraire que l'une des billes serait tombée d'un côté de la selle de cheval, et l'autre bille de l'autre côté. C'est un exemple où la géométrie de la surface sur laquelle on joue aux billes crée du chaos. Le *chaos*, en mathématiques, c'est exactement ce phénomène, où deux billes dont les conditions initiales sont très proches ont des trajectoires très différentes. On dit aussi qu'il y a une grande *sensibilité aux conditions initiales*. Pour en savoir plus, voir par exemple cette [vidéo](#).

Les systèmes dynamiques sont une branche des mathématiques où on s'intéresse précisément à ce type de questions. On étudie un système (un ensemble X , en mathématiques) qui évolue au cours du temps, l'évolution temporelle étant décrite par un flot continu $(\varphi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'applications $\phi^t : X \rightarrow X$ telles que $\phi^t \circ \phi^s = \phi^{t+s}$, ou par les itérations d'une fonction $f : X \rightarrow X$. La trajectoire, ou l'évolution au cours du temps d'un point $x \in X$ est donnée par son *orbite* $(\phi^t(x))_{t \in \mathbb{R}}$ (ou encore $(f^n(x))_{n \in \mathbb{Z}}$ dans le modèle discret). On parle de *chaos* lorsque deux points x et y arbitrairement proches peuvent avoir des comportements très différents, et de stabilité par rapport aux conditions initiales, dans le cas contraire. Comprendre quels sont les systèmes stables ou instables, savoir décrire la plupart des orbites y compris dans les systèmes chaotiques, sont les grandes questions abordées en systèmes dynamiques. A titre d'exemple, le célèbre *problème à trois corps*, décrivant les mouvements de trois corps, par exemple, la terre, la lune et le soleil, soumis aux attractions réciproques de la gravité, n'est toujours pas résolu. On ne sait pas si le système solaire est stable, ou bien si la planète Terre va s'échapper un jour pour aller se promener dans les confins de l'univers !

5.8 Math et architecture

Le [30 St Mary Axe](#) est un immeuble emblématique du quartier d'affaires de Londres. Construit en 2003, il est reconnu comme bâtiment écologique, car sa forme aérodynamique permet d'utiliser le vent dans le système de ventilation, été comme hiver. Les Londoniens ont pris l'habitude de l'appeler the Gherkin (le « cornichon »).

Construire a toujours impliqué au minimum une intuition mathématique. Par rapport à l'espace délimité par la construction, ou par rapport au matériau et à ses propriétés physiques, qui pouvaient être quantifiées puis manipulées pour créer des structures et des espaces agréables ou utiles. Depuis l'avènement de la modélisation virtuelle, qui dépend si largement des mathématiques, les possibilités ont véritablement explosé. Depuis les pyramides jusqu'au « Gerkin » en passant par le Taj Mahal, grâce aux mathématiques, les joyaux monumentaux démontrent le génie humain.

6 Des mathématiques pour se déplacer

6.1 Le vélo, la cycloïde

Les petites filles d'un certain âge ont peut-être déjà joué au [Spirographe](#) et fait rouler des roues à l'intérieur ou à l'extérieur d'un grand cercle.

Plus banalement, nous avons représenté la trajectoire d'un point d'une roue de vélo. C'est une cycloïde, succession d'arcs lisses entrecoupés de *points de rebroussement* (de première espèce, pour les spécialistes). Il y a quelques dizaines d'années, la mécanique était considérée comme un domaine des mathématiques. L'étude des courbes paramétrées en mathématique est intimement liée à la description des trajectoires de solides en mouvement.

Si on retourne un demi arc de [cycloïde](#) (la partie montante de l'arc), on obtient une courbe qui ressemble à un toboggan (ou une piste de skate acrobatique ?). Dans ce sens là, on appelle plutôt cette courbe *brachistochrone*. Dans la vraie vie, les toboggans n'ont jamais cette forme ! Et c'est heureux. Car un tel toboggan a la propriété folle que deux enfants qui se lanceraient de deux points de départ distincts arriveraient toujours en bas en même temps. Collisions assurées...

6.2 Trafic routier

Les voitures se déplaçant sur une route peuvent être décrites de diverses manières. La plus simple et naturelle est de considérer chaque voiture individuellement, dont le déplacement dépend du comportement du conducteur et de trafic environnant. Cependant, quand on commence à regarder le trafic à une grande échelle (autoroute, ville...), cela s'avère très lourd mais aussi inutile. En effet, on imagine bien qu'il n'est pas nécessaire de distinguer les comportements des conducteurs, un comportement moyen devrait être suffisant.

Dans le premier cas, on parle d'une description microscopique et le modèle le plus simple, dit "follow-the-leader", définit dans la version la plus simple la vitesse d'une voiture en fonction de la distance qui la sépare de la voiture la précédant.

Dans le cas d'une description macroscopique, on regarde plutôt une densité de voiture qui dépend du temps t et de la position x sur la route. Dans ce cas, on définit la variation en temps du nombre de voiture sur une portion de route en additionnant le flux de voitures qui arrivent et en soustrayant le flux de celles qui en partent. C'est le principe de conservation. Quand on écrit ce principe en toute généralité, cela permet de relier la variation en temps de la densité, $\partial_t \rho$, aux variations spatiales du flux $\partial_x(\rho v(\rho))$, où $v(\rho)$ est la vitesse des voitures.

À ce stade, les deux approches sont essentiellement équivalentes. On peut néanmoins complexifier les modèles, avec des comportements d'automobilistes qui diffèrent suivant les situations. Un exemple assez classique est ce qu'il se passe dans un ralentissement sur autoroute. Dans ce contexte, les automobilistes cherchent à aller le plus vite possible, qui à avoir une distance avec le véhicule le précédant très inférieure à la distance de sécurité. Comme le risque

d'événement inattendu est faible sur une autoroute, on peut penser que c'est raisonnable. Néanmoins, on se retrouve alors dans une situation instable : si l'automobiliste de devant freine, même légèrement, la distance entre les véhicules fait que l'on se retrouve à freiner un peu plus fort. Il est de même pour le véhicule suivant, etc. C'est ainsi qu'on peut constater des phénomènes d'accordéon, voir même de bouchons, alors qu'il n'y a en réalité aucun obstacle. Une reproduction de ce phénomène peut être vue [ici](#) : alors que la route ne présente aucun obstacle, la densité de voitures est telle qu'une petite perturbation mène à de fortes variations de densité et de vitesse des voitures. On voit même qu'au bout de 20 secondes dans la vidéo que des véhicules s'arrêtent. D'un point de vue mathématique, on reprend des modèles un peu plus évolués que les précédents, avec une vitesse de véhicule qui ne dépend plus uniquement de la distance avec la voiture le précédent. On peut alors déterminer les conditions d'apparition de ces instabilités. Un point étonnant est que d'un point de vue mathématique, ce phénomène s'apparente fortement avec celui de l'apparition de [roll waves](#), qui sont des fronts apparaissant à la surface d'une couche d'eau s'écoulant sur un plan suffisamment incliné.

Au-delà de l'aspect de la modélisation, cette compréhension de ces instabilités, qui sont d'ailleurs très stables une fois établies, est un enjeu très intéressant et complexe d'un point de vue de l'analyse mathématique de modèles physiques.

6.3 Modélisation des flux de voitures grâce aux statistiques

Les statistiques sont essentielles pour modéliser et comprendre les flux de voitures dans les réseaux de transport. En collectant des données sur le trafic, telles que le nombre de véhicules à différents moments de la journée, la vitesse moyenne ou les temps d'attente, les chercheurs peuvent analyser les comportements de déplacement. Ces analyses permettent de prédire les périodes de forte affluence et d'identifier les zones sensibles aux embouteillages. Grâce aux modèles statistiques, il est possible de simuler des scénarios pour optimiser la circulation, par exemple en ajustant les feux de signalisation ou en concevant des itinéraires alternatifs. Ces outils aident également à anticiper les impacts des nouvelles infrastructures routières. Ainsi, les statistiques contribuent à améliorer la fluidité du trafic et à réduire les émissions de gaz à effet de serre associées aux congestions.

6.4 Avions

Les mathématiques jouent un rôle fondamental dans le domaine de l'aviation, influençant chaque étape du processus, de la conception à l'exploitation des avions. Elles permettent de comprendre et de modéliser des phénomènes complexes, tels que le comportement de l'air autour des ailes et du fuselage, ce qui est essentiel pour assurer un vol stable et efficace. Les mathématiques sont aussi nécessaires pour optimiser les performances des avions, réduire la consommation de carburant et améliorer la sécurité des vols.

Lors de la conception d'un avion, les mathématiques sont utilisées pour déterminer la forme idéale des ailes et du fuselage afin de minimiser la traînée (le frottement de l'air sur l'avion) et maximiser la portance (la force sur l'avion allant de bas en haut). Les équations de l'aérodynamique, comme celles de *Navier-Stokes*, permettent de simuler le flux d'air autour de l'avion et d'identifier les zones où des améliorations peuvent être apportées. Les techniques d'optimisation mathématique sont également employées pour choisir les matériaux les plus adaptés et pour concevoir des structures légères et résistantes, réduisant ainsi le poids total de l'avion et augmentant son efficacité énergétique. Cette aide à la conception se fait donc à l'aide de logiciels de simulation, dont le cœur est basé sur des outils mathématiques avancés qui permettent de garantir la précision et la fiabilité des résultats. Cette approche de conception assistée par ordinateur permet d'éviter un recours important à des études expérimentales, en soufflerie par exemple, qui sont longues à réaliser et très onéreuses. Si on veut modifier la forme d'une aile d'avion, c'est presque immédiat sur ordinateur, alors que la construction d'une nouvelle aile et de son étude en soufflerie peuvent durer plusieurs jours.

Une fois l'avion en service, les mathématiques continuent de jouer un rôle crucial dans son exploitation. Les algorithmes de navigation permettent de calculer les trajectoires de vol les plus efficaces, en tenant compte des conditions météorologiques et des contraintes de trafic aérien. Les systèmes de contrôle automatique, basés sur des modèles mathématiques, assurent une stabilité et une précision de vol optimales. De plus, les statistiques et la théorie des probabilités sont utilisées pour évaluer la fiabilité des composants de l'avion et pour planifier les opérations de maintenance, garantissant ainsi la sécurité des passagers et la longévité de l'appareil.

Enfin, certains logiciels doivent être parfaitement fiables, comme ceux intervenant dans le pilote automatique par exemple. Cette fiabilité peut être garantie à l'aide d'outils mathématiques théoriques.

7 Les maths pour transmettre de l'information

7.1 Ondes, télécom

7.1.1 Equation des ondes

L'équation des ondes est une équation aux dérivées partielles datant du 18^e siècle qui modélise les phénomènes de propagation à une vitesse constante. Ou plutôt, à une vitesse dont la valeur est constante, un peu plus de 1200 km/h pour le son dans l'air, mais allant dans toutes les directions. Celle-ci s'applique dans de nombreux cas : vibration d'une corde de guitare, de la peau d'un tambour, propagation du son dans l'air, des perturbations de la surface de l'eau après un jet de caillou, propagation des ondes électromagnétiques pour les téléphones portables, propagation de la lumière, etc.

L'étude de cette équation peut souvent faire apparaître des interactions intéressantes avec la géométrie, notamment quand on désire étudier l'acoustique

d'une salle de spectacle, à travers sa forme mais aussi pour optimiser la position de panneaux acoustiques. On imagine bien aussi l'utilité de cette équation pour les antennes-relais de téléphonie mobile et les satellites.

7.1.2 Les antennes paraboliques

La parabole tracée dans le sable est une *conique*, c'est-à-dire une courbe qu'on peut obtenir en intersectant un cône et un plan.

Les coniques peuvent être rangées en trois familles, les *ellipses*, les *paraboles* et les *hyperboles*. Les ellipses et les paraboles ont des propriétés optiques très étonnantes. Si la parabole est représentée classiquement dans un repère, avec une équation du type $y = x^2$, comme au lycée, alors tous les rayons qui arrivent parallèlement et verticalement pour taper la parabole se réfléchissent et convergent vers le *foyer*, un point très particulier. C'est le principe de l'antenne parabolique que l'on voit sur le toit de la maison médicale à droite du paysage. Tous les rayons venant de l'infini se réfléchissent sur la parabole pour se concentrer en même temps au foyer. Inversement, un signal émis dans toutes les directions au niveau du foyer se réfléchira et repartira parallèle dans la direction de l'axe de la parabole. C'est le même principe qui est à l'oeuvre dans les fours solaires, avec des paraboles recouvertes de miroirs, pour concentrer la chaleur du soleil au foyer, et cuire votre tajine sans électricité.

Autres coniques, les *ellipses* ont deux foyers. Tout rayon qui part d'un foyer se réfléchit sur l'ellipse (comme une boule de billard) et se dirige ensuite vers le deuxième foyer. Cette propriété a une conséquence amusante. Dans les vieilles stations de métro parisien, deux voyageuses placées face à face sur deux quais opposés peuvent chuchoter leurs secrets sans que leurs voisins sur le même quai ne puissent les entendre !

Les hyperboles, troisième grande famille de coniques, ont également des propriétés optiques, mais un peu plus virtuelles, les rayons réfléchis repassent par l'infini, et ce n'est pas très utilisable dans le monde réel...

7.2 Informatique

En haut à gauche de la maison médicale, on voit une personne devant un ordinateur rempli de 0 et de 1. Cette vignette est là pour nous rappeler les liens importants et profonds entre mathématiques et informatique. Nous en expliquons deux ci-dessous.

7.2.1 Le monde en binaire

On parle malheureusement à tort de *dématérialisation* quand il s'agit de numérisation, d'informatisation du monde. Pourtant les ordinateurs et le réseau internet sont de braves systèmes physiques. Au tréfonds des ordinateurs et smartphones, on trouve des *circuits imprimés*, qui ne sont rien d'autre que des circuits électriques miniaturisés. On peut imaginer que dans ce circuit, il y a des ampoules, allumées ou éteintes. Pour chaque ampoule, on pense 1 si elle est

allumée, et 0 si elle est éteinte. Chaque information enregistrée sur l'ordinateur est codée comme une suite de 0 et de 1.

Ce codage des messages repose sur une étape clé : savoir écrire tous les nombres à l'aide de 0 et de 1. Cette écriture s'appelle l'*écriture binaire*.

Pour comprendre comment cela marche, rappelons nous de l'écriture décimale d'un nombre entier. Notre écriture est décimale, car nous avons dix doigts de mains. On commence par compter sur les doigts. Quand on arrive au bout des dix doigts, on note quelque part qu'on a compté un paquet de dix, une *dizaine*, puis on recommence à compter 0, 1, 2, 3, ..., 8, 9 Etc. Quand on a atteint dix paquets de dix, on note quelque part qu'on a atteint dix paquets de dix, une *centaine*, et on continue. La notation de position permet de déterminer si le chiffre indique un, dix ou 100 paquets de 10.

Pour écrire un nombre en binaire, on imagine être un extraterrestre qui n'aurait que deux doigts, un sur chaque main. Et on fait comme en écriture décimale, mais avec des paquets de deux unités, puis de deux paquets de deux unités, etc. Ainsi, les nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10... s'écrivent 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011... Ces nombres se représentent sur des arbres binaires, qui, comme sur le dessin ont chaque branche qui se divise en 2. Ainsi à chaque étage de l'arbre correspond une suite de 0 et de 1.

Toutes les recherches et innovations dans le monde numérique, dont certaines sont présentées dans la BD [Les décodeuses du numérique](#), reposent sur cette écriture binaire des nombres.

7.2.2 Algorithme et analyse numérique

Comme le montre ce document, de nombreux problèmes peuvent être formulés sous la forme d'équations mathématiques. D'un point de vue mathématique, la première étape, après la mise en équation (c'est-à-dire la modélisation), consiste à donner un sens à cette équation en définissant un contexte dans lequel on souhaite la résoudre. Grâce à des théorèmes mathématiques, il est possible de démontrer l'existence, voire l'unicité de la solution, à condition que le problème soit bien posé. Toutefois, dans de nombreux cas, ces théorèmes ne permettent pas de déterminer explicitement la solution dès lors que l'équation devient complexe, par exemple lorsqu'elle implique des opérateurs différentiels sur l'inconnue.

L'idée principale consiste alors à concevoir un algorithme, c'est-à-dire une suite finie d'opérations élémentaires, dont le résultat approche la solution de l'équation. Cette approche peut parfois paraître utopique pour plusieurs raisons : soit elle est actuellement irréalisable, soit elle est trop longue, soit elle est impossible en raison de l'infinité des valeurs que peuvent prendre les inconnues. Ainsi, on se contente généralement de définir un algorithme dont le résultat est proche de la solution.

Dans ce cadre, le rôle des mathématicien.ne.s est de concevoir un algorithme convergeant vers la solution du problème étudié. Les algorithmes proposés peuvent être très complexes, et les méthodes permettant de quantifier l'erreur de l'algorithme, afin de maîtriser l'écart entre le calcul et la solution attendue, sont généralement privilégiées. Lorsque les équations sont différentielles,

on parle d'analyse numérique.

Une fois l'algorithme défini et ses propriétés établies, sa mise en oeuvre relève de l'informatique. Autrefois, la seule manière d'effectuer les calculs dictés par l'algorithme était de les réaliser à la main avec papier et crayon. Les personnes chargées de cette tâche étaient appelées *calculatrices*, souvent des femmes. En anglais, on les appelait *computers*, et aujourd'hui, ce terme désigne les machines capables de réaliser ces mêmes tâches grâce à leur puissance de calcul. L'algorithme peut donc être *implémenté* dans un ordinateur, via un langage de programmation qui indique à la machine les calculs à effectuer et leur ordre d'exécution (d'où le terme *ordinateur*).

L'exemple suivant illustre ce processus. Partons du système d'équations de la dynamique de population :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}(t) &= x(t)(\alpha - \beta y(t)) \quad (\text{évolution des lapins}), \\ \frac{dy}{dt}(t) &= -y(t)(\gamma - \delta x(t)) \quad (\text{évolution des renards}).\end{aligned}$$

On peut démontrer que, si l'on connaît les conditions initiales :

$$\begin{aligned}x(0) &= x_0 \quad (\text{nombre initial de lapins}), \\ y(0) &= y_0 \quad (\text{nombre initial de renards}),\end{aligned}$$

une solution unique existe, bien qu'elle ne soit pas explicite.

On va alors calculer une approximation de cette solution sur un intervalle de temps $[0, T]$, que l'on discrétise en petits intervalles, définissant les temps $t_n = nh$ où h est le pas de temps, et n va de 0 à N (avec $t_N = T$).

Le schéma d'Euler explicite, très classique, consiste à approcher la dérivée de $\frac{dx}{dt}$ en un point t_n par le taux d'accroissement :

$$\frac{dx}{dt}(t_n) \approx_{h \rightarrow 0} \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h}, \quad \frac{dy}{dt}(t_n) \approx_{h \rightarrow 0} \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h}.$$

En notant $(x_n)_{n=0, \dots, N}$ et $(y_n)_{n=0, \dots, N}$ les approximations de $(x(t_n))_{n=0, \dots, N}$ et $(y(t_n))_{n=0, \dots, N}$, les suites x_n et y_n sont définies ainsi :

$$x_{n+1} = x_n + hx_n(\alpha - \beta y_n), \quad y_{n+1} = y_n - hy_n(\gamma - \delta x_n).$$

Cette approximation est valable si h est suffisamment petit (d'où un grand N et un grand nombre de points à calculer), et permet d'écrire l'algorithme suivant (en Python) :

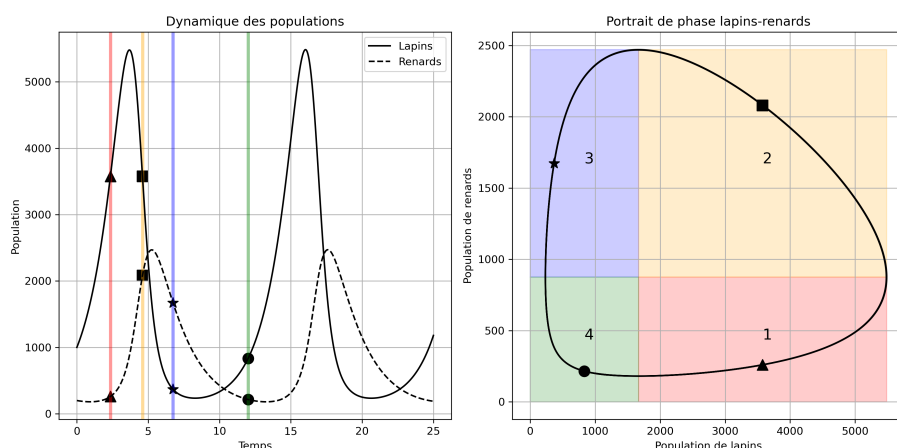
```

1 x[0], y[0] = x0, y0 # Conditions initiales
2 for n in range(N): # Boucle sur les iterations en temps
3     x[n+1] = x[n] + h*x[n]*(alpha - beta*y[n]) # Evolution lapins
4     y[n+1] = y[n] - h*y[n]*(gamma - delta*x[n]) # Evolution renards

```

La figure suivante montre l'évolution des deux populations pour certaines valeurs de paramètres. Le graphe de gauche représente l'évolution temporelle des

populations, tandis que celui de droite présente le portrait de phase, illustrant l'évolution de la population de renards en fonction de celle des lapins. Notre approximation numérique permet de visualiser le caractère cyclique du problème et d'en interpréter les résultats.



On observe d'abord que les deux populations croissent (zone 1, triangle). Le grand nombre de renards entraîne une pression accrue sur les lapins, ce qui réduit leur nombre (zone 2, carré). Lorsque la population de renards augmente et que celle des lapins diminue, les prédateurs finiront par manquer de nourriture, ce qui stoppe leur croissance et les fait même décroître (zone 3, étoile). Cela permet à la population de lapins de se stabiliser et de croître de nouveau, car le nombre de prédateurs a diminué (zone 4, rond). La reprise des lapins arrête ensuite le déclin des renards, qui recommencent à croître, revenant ainsi au point départ (zone 1, triangle).

7.3 Théorie des codes correcteurs d'erreurs

Lorsque nous transmettons une information, que ce soit en parlant ou en utilisant un ordinateur qui code les données en 0 et 1, il peut y avoir du bruit, ce qui altère ou fait perdre une partie du message. Une stratégie courante pour aider le récepteur à comprendre le message est de le répéter plusieurs fois. Cependant, cela implique d'envoyer une grande quantité d'informations redondantes. Imaginez que, chaque fois que nous disons quelque chose, nous le répétons systématiquement pour s'assurer que tout le monde l'a bien compris !

La théorie des codes correcteurs d'erreurs, qui fait partie de la théorie de l'information, étudie comment envoyer des messages avec un minimum de répétition tout en conservant une capacité suffisante de correction des erreurs. L'objectif est de trouver un bon compromis entre la quantité d'information transmise et la capacité à détecter et corriger les erreurs.

Les codes correcteurs d'erreurs sont utilisés dans les communications téléphoniques, les messages envoyés par des sondes spatiales et le stockage de données

sur des supports comme les DVD.

Le formalisme mathématique sous-jacent repose sur la notion d'ensemble muni d'une métrique. Par exemple, considérons un ensemble de chaînes de 7 lettres issues d'un alphabet donné, où la distance entre deux mots est définie par le nombre de lettres différentes entre ces mots. Un sous-ensemble de cet ensemble représente les mots ayant un sens, par exemple, les mots de 7 lettres d'un dictionnaire français. Lorsqu'une chaîne de 7 lettres est reçue, on suppose que le mot envoyé est celui qui lui est le plus proche. Par exemple, si l'on reçoit "bonjofr", on peut raisonnablement supposer que "bonjour" a été envoyé, ce qui signifie qu'une erreur a été détectée et corrigée. En revanche, si l'on reçoit "malodie", on détecte une erreur mais on ne sait pas si le mot original était "mélodie" ou "maladie". Dans ce cas, l'erreur est détectée mais ne peut pas être corrigée.

La théorie mathématique des codes correcteurs d'erreurs (concernant les ensembles et sous-ensembles de mots de longueur fixée, souvent sur l'alphabet binaire 0,1) est aussi présente dans certains jeux, comme le [Dobble](#) ou le [Qui est-ce ?](#)

7.4 Cryptographie

Lors de la transmission d'informations, il est souvent crucial d'assurer leur sécurité, c'est-à-dire de faire en sorte que seul le destinataire prévu puisse les lire. Cela concerne, par exemple, l'envoi de messages sur WhatsApp, d'e-mails ou de codes secrets de cartes bancaires. Mais ce besoin existait déjà dans l'Antiquité, lorsque les chefs militaires devaient transmettre des informations confidentielles à leurs généraux. Le premier "document" chiffré connu remonte au XVIème siècle avant notre ère : il s'agit d'une tablette d'argile d'un potier irakien sur laquelle il avait gravé sa recette secrète.

Jusqu'au XIXème siècle, la plupart des protocoles de chiffrement étaient basés sur la substitution de lettres (ou de blocs de lettres) par d'autres. La sécurité reposait essentiellement sur le secret du protocole lui-même, ce qui n'est pas une bonne stratégie. Un bon protocole de chiffrement doit rester sûr même si son fonctionnement est connu. L'idée-clé est donc d'utiliser des problèmes mathématiques difficiles à résoudre. Dans les années 1970, on a commencé à exploiter la théorie des nombres pour développer des cryptosystèmes robustes. Deux problèmes mathématiques fondamentaux sous-tendent encore aujourd'hui les systèmes les plus utilisés :

- le problème du logarithme discret (donnés des entiers g , b et n , trouver un entier a tel que $g^a \equiv b \pmod{n}$) pour le cryptosystème de Diffie-Hellman (1976), et
- la factorisation des grands nombres entiers pour le RSA (1977).

Depuis les années 1990, l'éventualité du développement d'ordinateurs quantiques a soulevé des inquiétudes. Les ordinateurs quantiques utilisent des qubits au lieu de bits. Alors que les bits classiques prennent les valeurs 0 ou 1, les qubits existent dans une superposition quantique des deux. Cela leur confère une

puissance de calcul exponentielle, leur permettant de résoudre rapidement des problèmes mathématiques complexes comme ceux mentionnés précédemment. Si un tel ordinateur venait à être construit, il pourrait casser les cryptosystèmes actuels.

C'est ainsi qu'est née la cryptographie post-quantique. Actuellement, une compétition internationale, organisée par le NIST, est en cours pour évaluer et sélectionner les meilleurs cryptosystèmes résistants aux attaques quantiques. Parmi les problèmes mathématiques exploités par ces systèmes, on trouve la résolution de systèmes d'équations polynomiales en plusieurs variables et la recherche de vecteurs courts dans un réseau. On trouve aussi les groupes de présentation finie, voir Section 8.2. Les groupes de tresses notamment ont été finalistes de compétitions NIST et les groupes restent une allée de recherche en cryptographie post-quantique.

8 Structures mathématiques

Une part importante de l'activité mathématique consiste à dégager de nouvelles notions mathématiques, chercher des exemples illustrant cette notion, puis tenter de classer les objets mathématiques.

8.1 Surfaces

Une *surface* est une forme qui ressemble localement à un petit disque du plan, éventuellement déformé. Par exemple, un plan, une sphère ou une bouée sont des surfaces.

Il est possible de classer toutes les surfaces (à déformation près), de la manière suivante.

D'abord, on trie les surfaces en deux grandes familles : les surfaces orientables, qui ont deux côtés, et les surfaces non orientables, qui n'ont qu'un seul côté. Par exemple, si vous prenez une fine bande de papier, qui a deux côtés, et que vous la recollez au bout, avec une torsion, vous obtiendrez un *ruban de Moebius*, qui n'a qu'un seul côté.

Dans le paysage, le personnage qui pique nique va essayer de boire dans une *bouteille de Klein*. Cette bouteille n'a ni intérieur, ni extérieur ! Croyez-vous qu'on puisse la remplir ?

Les surfaces orientables sans bord ont deux côtés, un intérieur et un extérieur, et peuvent être classifiées par leur *genre* noté g , qui est un entier positif ou nul. La sphère est la surface de genre 0. Une bouée usuelle, ou *tore*, est la surface de genre 1. Une bouée à deux trous pour deux enfants est de genre $g = 2$ et on étudie les surfaces de genre n'importe quel nombre naturel.

Le ruban de Moebius a un bord, qui a une seule composante, alors que si vous aviez recollé votre bande de papier sans la torsion, il y en aurait eu deux. Le disque est la surface à bord de genre 0. Si vous coupez votre ruban de Moebius dans le sens de la longueur, de manière à ce que votre fine bande de papier soit

deux fois plus fine, vous obtiendrez une bande de papier recollée en cylindre qui lui aura un seul côté, torsadé sur lui-même.

8.2 Présentation de groupes

La géométrie est l'étude de certaines formes de l'espace, et de leurs symétries. Par exemple, si on parle de la géométrie du carré, il s'agit de comprendre la figure d'une part, un quadrilatère dont les côtés sont de même longueur, et les angles aux sommets égaux à $\frac{\pi}{2}$, mais aussi ses symétries : on peut tourner le carré d'un quart de tour, par exemple, ou bien faire une symétrie miroir par rapport à une diagonale ou à la médiatrice d'un côté. On peut également *composer* plusieurs symétries à la suite, en les enchaînant les unes après les autres, obtenant ainsi d'autres symétries. L'ensemble de toutes les symétries d'une figure, avec la possibilité d'en faire plusieurs successivement et de les inverser, s'appelle un *groupe de symétrie*.

Par extension, on appelle *groupe* en mathématiques non seulement l'ensemble des symétries d'une figure géométrique, mais également tout ensemble d'objets mathématiques avec une opération qui permette de les considérer les uns à la suite des autres. Par exemple, l'ensemble des nombres entiers, rationnels, réels ou complexes, muni de l'opération d'addition, est un groupe. Les *groupes* sont ainsi une structure fondamentale en mathématiques.

Lorsqu'on étudie une forme géométrique, on s'intéresse au groupe des symétries qui préservent cette forme. Mais quand on s'intéresse à la géométrie d'objets en caoutchouc, déformables, les symétries ne sont plus très utiles. Le *groupe fondamental* est l'ensemble des *lacets fermés*, qui sont des boucles qu'on peut tracer sur notre forme géométrique, à déformation près. Par exemple, sur les bouées dessinées dans la mer, on peut tracer des lacets qui font le tour de chaque anse de deux manières distinctes. Pour la bouée à deux anses, on note a et b les deux façons de faire le tour de la première anse, x et y les deux façons de faire le tour de la 2ème anse.

Dans cet exemple, n'importe quel lacet tracé sur la bouée va pouvoir être décrite comme un *mot*, une succession des boucles a, b, x, y , toujours à déformation près. On dit alors que a, b, x, y sont les *générateurs* du groupe fondamental de notre bouée à deux trous. On peut se convaincre que parcourir a puis b puis a à l'envers puis b à l'envers, revient à parcourir x puis y puis x à l'envers, puis y à l'envers. On écrit alors l'égalité $[a, b][x, y] = 1$, qui signifie précisément cela.

La *présentation du groupe* s'écrit alors $\langle a, b, x, y \mid [a, b][x, y] = 1 \rangle$.

Plus généralement, la présentation d'un groupe (de symétries, de boucles, ou autres...) est la donnée d'une famille de générateurs, qui permettent de décrire tous les éléments du groupe, et d'une famille de relations, qui décrivent toutes les simplifications possibles.

8.3 Solides de Platon

La structure de jeu sur laquelle les enfants grimpent est un *icosaèdre* un peu tronqué pour le poser sur le sol. L'icosaèdre est un *polyèdre régulier*. Un

polyèdre est une figure géométrique qui a des sommets, des faces, et des arêtes. Le polyèdre le plus simple que vous connaissiez est le *cube*. Il a 8 sommets, 12 arêtes, 6 faces, qui sont toutes des carrés identiques.

L'icosaèdre, lui, a 12 sommets, 20 faces qui sont des triangles équilatéraux identiques, et 30 arêtes.

Observez au passage que $8 - 12 + 6 = 2$, et $12 - 30 + 20 = 2$. Plus généralement, n'importe quel polyèdre (à condition qu'il puisse être arrondi et dessiné sur une sphère) vérifie cette relation dite *formule d'Euler* : $S - A + F = 2$. Le nombre de sommets moins le nombre d'arêtes plus le nombre de faces vaut 2. Magique !

Revenons au cube et à l'icosaèdre. Ce sont des polyèdres réguliers : toutes leurs faces sont identiques, et le nombre de faces et d'arêtes partant de chaque sommet sont les mêmes. Les mathématiciennes adorant trier, ranger, classer, elles se demandent immédiatement s'il est possible de trouver d'autres polyèdres réguliers. Si vous essayez de trouver des polyèdres réguliers dont les faces sont des triangles équilatéraux, vous allez probablement en trouver deux autres. Le tétraèdre régulier a 4 faces, 4 sommets, 6 arêtes. L'octaèdre régulier a 8 faces, 6 sommets, 12 arêtes. Ouf ! la formule d'Euler est encore vérifiée. Si vous cherchez d'autres polyèdres réguliers avec des faces à plus de côtés, ça va se compliquer. Le cube est le seul polyèdre dont les faces sont des carrés. Le *dodécaèdre*, obtenu (par exemple) en plaçant un sommet au centre de chaque face de l'icosaèdre, a 20 sommets, 12 faces qui sont des pentagones réguliers, et 30 arêtes. Il vérifie encore la formule d'Euler, évidemment.

Si vous cherchez encore, vous pourrez chercher longtemps... il n'y en a pas d'autres ! Ces cinq polyèdres réguliers sont appelés les *solides de Platon*. Vous pourriez douter, et tenter d'en construire d'autres en suivant la méthode précédente, en prenant un des polyèdres ci-dessus, et en plaçant un sommet au centre de chacune de ses faces, puis en les reliant. Si vous partez d'un tétraèdre régulier, et joignez les centres de ses faces, vous obtiendrez ... un autre tétraèdre. Si vous partez d'un cube et joignez les centres de ses faces, vous obtiendrez un octaèdre régulier. Inversement, en joignant les centres des faces d'un octaèdre régulier, vous obtiendrez un cube. On a vu qu'en joignant les centres des faces d'un icosaèdre, on obtient un dodécaèdre régulier. Inversement, n'hésitez pas à vérifier qu'en joignant les centres des faces du dodécaèdre régulier, on retombe sur un icosaèdre régulier !

Si le trop petit nombre de polyèdres réguliers vous frustre trop, ou encore si vous êtes amatrice de foot et trouvez que les [solides de Platon roulent mal](#) vous pouvez assouplir les règles et vous intéresser aux polyèdres dont les faces sont de deux sortes. Le ballon de foot, classiquement, est obtenu en partant d'un icosaèdre et en coupant un bout autour de chaque sommet. On obtient un polyèdre qui a 32 faces, 20 faces hexagonales, et 12 faces pentagonales. C'est le ballon de foot qui est représenté au pied de l'icosaèdre, sur l'image. A vous de calculer son nombre de faces et d'arêtes ! Et de vérifier, évidemment, qu'il satisfait la formule d'Euler ...

8.4 Graphes, 4 couleurs

Le problème du coloriage de carte avec 4 couleurs est une célèbre question mathématique liée à la théorie des graphes. Il s'agit de déterminer si toute carte géographique peut être coloriée avec un maximum de quatre couleurs de manière à ce que deux régions adjacentes (qui partagent une frontière commune, et non un simple point) aient toujours des couleurs différentes.

Formulé pour la première fois en 1852 ce problème semblait évident à vérifier pour des cartes simples, mais sa généralisation pour des cartes complexes s'est révélée extrêmement difficile à prouver mathématiquement. Pendant plus d'un siècle, de nombreux mathématiciens ont tenté de résoudre ce problème, produisant des preuves incorrectes ou incomplètes.

La solution définitive a été obtenue en 1976 et la preuve a été la première à utiliser de manière intensive un ordinateur, suscitant un débat sur la validité des preuves assistées par machine. Ils ont réduit le problème à un nombre fini de configurations critiques et ont utilisé l'ordinateur pour vérifier systématiquement ces cas.

Le théorème des quatre couleurs a de nombreuses applications en mathématiques et en informatique, notamment en optimisation et en cartographie. Il marque également un tournant dans l'utilisation des ordinateurs pour résoudre des problèmes mathématiques complexes.

On peut se poser la même question lorsque les cartes à colorier sont dessinées sur une bouée, et là il faudra 7 couleurs. La démonstration est beaucoup plus simple dans ce cas et utilise la [théorie des noeuds](#). La théorie des noeuds a été développée dès les années 20 de manière très théorique et a trouvé de nombreuses applications industrielles, notamment pour le développement du plastique à travers l'étude des polymères, qui sont des chaînes nouées. Le plastique ayant envahi nos vies, vous le retrouverez un peu partout dans le dessin comme on le trouve dans les moindres recoins de notre vie, jusqu'à l'eau qu'on boit.