L'ÉQUATION SHAKESPEARIENNE D'OTHELLO

La surface cubique baptisée **Othello** (Fig.1) appartient à la collection de l'Institut Henri Poincaré (IHP) à Paris. Son nom lui a été donné par le peintre et photographe surréaliste Man Ray en 1935. C'est en effet cette année-là que Man Ray découvre la collection des moulages de l'IHP et décide d'en photographier certains auxquels il attribue des noms de pièces de Shakespeare, d'où le terme d'équation shakespearienne. Nous nous proposons de retrouver l'équation perdue d'Othello. Une simple observation indique qu'il s'agit d'une surface cubique sur laquelle sont tracées vingt-sept droites. C'est une réalisation concrète du théorème de Cayley et Salmon datant de 1849.
Toute surface cubique de $\mathbb{P}^3$ *non réglée contient au plus* 27 *droites.*
Il se trouve que la connaissance de huit droites (on dira un **cinq-trois**) astreintes à la table d'incidence de la figure (Fig. 2) suffisent pour caractériser la cubique.
On peut choisir un repère projectif de manière que les huit droites notées

$$\begin{array}{ccccc} a_2 & a_4 & a_6 & & \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array}$$

et vérifiant les conditions suivantes correspondant à la table d'incidence donnée (Fig. 2), aient, dans le système de coordonnées homogènes $(w : x :$

FIGURE 1. Othello.

			•		•	•	•
			•	•	•		•
			•	•	•	•	•
•	•	•					
	•	•					
•	•	•					
•		•					
•	•	•					

Figure 2. Table d'incidence d'un cinq-trois.

$y : z)$, les équations ci-dessous.

$$b_1 : \begin{cases} w = 0 \\ x = 0 \end{cases}, \qquad b_2 : \begin{cases} w = \alpha z \\ x = \beta y + (\alpha - \beta) z \end{cases}, \qquad b_3 : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$b_4 : \begin{cases} x = \gamma y \\ z = \delta w + (1 - \gamma\delta) y \end{cases}, \qquad b_5 : \begin{cases} x = y \\ z = w \end{cases}, \qquad a_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$a_4 : \begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}, \qquad a_6 : \begin{cases} w = x \\ y = z \end{cases}$$

Les conditions d'incidence s'écrivent

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \gamma\delta, \beta\delta \neq 0, 1 \qquad \alpha \neq \beta, \gamma.$$

L'unique surface cubique Σ contenant le cinq-trois a pour équation

$$(wy - xz)(aw + bx + cy + dz) + exz(w - x + y - z) = 0,$$

où

$$\begin{cases} a = \gamma\delta(\alpha - \beta)(\gamma - 1), \quad b = (1 - \gamma\delta)(\gamma(\alpha - \beta) + \alpha(\beta - 1)) \\ c = \beta\gamma(1 - \alpha)(1 - \gamma\delta), \quad d = \gamma(\alpha - \beta)(1 - \alpha + \delta(\alpha - \gamma)) \\ e = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(1 - \gamma\delta). \end{cases}$$

Les données numériques issues du modèle produisent l'équation suivante.

$$-1 + 12x^2y + 11x^2z - 7y + 2y^2 + 2y^3 - 8z + 10yz + 7y^2z + 14z^2 - 7yz^2 - 7z^3 = 0$$

François Apéry
Email address: `françois.apery@uha.fr`