1. Le nombre d'or : φ

Il s'agit du nombre

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.618$$

C'est le premier nombre dont l'irrationalité a été prouvée. On doit ce résultat à Théodore de Cyrène au $V^{\text{ème}}$ siècle avant J.C. D'un point de vue géométrique, c'est le rapport entre le grand côté b d'un rectangle et son petit côté a, de telle sorte que s'il on découpe le carré de côté a, il reste un rectangle semblable. Cela se traduit arithmétiquement par le développement en fraction continue

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$

Le nombre d'or apparaît également comme limite du rapport entre deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci f_n :

$$f_0 = 1,\ f_1 = 1,\ f_2 = 2, \ldots, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad \varphi = \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

2. Le rapport de la circonférence au diamètre du cercle : π

Ce rapport de la circonférence au diamètre du cercle est incontestablement le nombre qui a le plus fait couler d'encre. En dehors de sa définition géométrique, on peut le définir par la formule de Leibniz (1674).

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = 0.785398\ldots$$

Son irrationnalité résulte du développement en fraction continue infini de $\tan x$ dû à Lambert en 1767.

$$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ddots}}}}$$

En prenant $x = \frac{\pi}{4}$, et en raisonnant par l'absurde, on trouve que π^2 et donc π est irrationnel. La transcendance de π est due à Ferdinand von Lindemann en 1882.

3. Le nombre complexe $i = \sqrt{-1}$

Le nombre i dont le carré vaut -1 permet de construire tous les nombres complexes. Son invention et son écriture sous la forme $\sqrt{-1}$ sont dues à Raphaël Bombelli en 1572. Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont réels. Avec ces nombres, toute équation de degré au moins 1 admet au moins une solution. Si on représente le nombre complexe z par le point du plan réel de coordonnées (a, b), alors la multiplication par i correspond à la rotation d'angle $\pi/2$ autour de l'origine. Euler a établi la célèbre formule

$$e^{i\pi} = -1$$

C'est en appliquant cette formule, que Lindemann prouve la transcendance de π. Par ailleurs l'égalité

$$e^{\pi} = (e^{i\pi})^{-i} = (-1)^{-i}$$

conduit à la transcendance de e^{π} d'après un théorème d'Alexandre Gelfond de 1929.

4. La base du logarithme népérien : e

Ce nombre est la somme de la série suivante.

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = 2.7182818284\ldots$$

Si on définit la fonction logarithme népérien ln comme la primitive de $\frac{1}{x}$ qui s'annule en 1, alors e est caractérisé par la relation $\ln e = 1$. Autrement dit, e est la base du logarithme népérien. Le développement en fraction continue infini dû à Leonhard Euler en 1737

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}}}}}$$

prouve l'irrationnalité de e. La transcendance de e est due à Charles Hermite en 1873.

5. La constante ζ_3

Ce nombre est défini par une somme infinie.

$$\zeta_3 = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots = 1.2020569\ldots$$

C'est la valeur en $s = 3$ de la fonction de variable complexe ζ de Riemann qui, pour les nombres réels $s > 1$ était connue d'Euler.

$$\zeta_s = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

En 1737, Euler avait calculé les valeurs de ζ pour $s = 2n$.

$$\zeta_2 = \frac{\pi^2}{6},\ \zeta_4 = \frac{\pi^4}{90},\ \zeta_6 = \frac{\pi^6}{945}, \ldots$$

En revanche, il avait conjecturé que ζ_3 s'exprimerait comme le produit de π^3 par un nombre dépendant de $\ln 2$. La question est toujours en suspens. On sait seulement depuis 1977 (R. Apéry) que ζ_3 est irrationnel.

6. La constante d'Euler γ

Ce nombre est défini comme limite d'une suite.

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}) - \ln n = 0.577215664\ldots$$

La fonction ζ de Riemann, qui est définie pour tout nombre complexe s différent de 1, admet un pôle en $s = 1$, et son développement au voisinage de 1 s'écrit :

$$\zeta_s = \frac{1}{s-1} + \gamma - \gamma_1(s-1) + \frac{1}{2}\gamma_2(s-1)^2 + \cdots$$

avec $\gamma_1 = 0.0728\ldots$, $\gamma_2 = 0.00969\ldots$. Voici une autre égalité qui relie γ et ζ.

$$\gamma = \frac{1}{2}\zeta_2 - \frac{1}{3}\zeta_3 + \frac{1}{4}\zeta_4 + \cdots$$

La nature arithmétique de γ est inconnue. On ignore si elle est rationnelle.