

Le trésor du vieux pirate

Un vieux capitaine pirate est à l'article de la mort. Il souhaite léguer son trésor à ses deux lieutenants, vous : le **Second**, et le Canonnier. Manque de chance pour lui, vous vous méfiez l'un de l'autre.

Le vieux pirate cherche un moyen de vous forcer à travailler ensemble.

Il réfléchit beaucoup et se souvient de sa jeunesse où il étudiait les mathématiques avant de changer de métier. Il trouve alors un moyen.

La table des symboles

Les caractères

Il va utiliser les caractères utilisés dans les codes QR.

Ainsi, 22 est la lettre M, 36 est l'espace et 40 est le caractère +.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
U	V	W	X	Y	Z		\$	%	*	+	-	.	/	:

À l'aide de cette table, le pirate envoie un message secret aux deux lieutenants. Décodez-le :

27-14-23-13-14-35-41-31-24-30-28-36-28-30-27-36-21-10-36-13-30-23-14-29-29-14-42

Vous (le **Second**) avez répondu : « APRES LE PREMIER QUART. »

Codez ce message avec cette table pour que le Canonnier (et les autres marins) ne le lisent pas :

L'addition

Voici le message donné aux deux lieutenants :

S	27	58	47	16	58	65	08	76	26	07	70	19	88	66	72	96	39	20	71	67	76	49	81	78	99	27	22	16
C	04	62	99	06	62	62	21	48	10	17	58	10	58	57	48	37	99	16	50	53	60	73	39	49	41	02	92	36
⊕	21	10	36	12	10	27	29	14	36	14	28	29	36	13	10	23	28	36	21	10	36	12	10	17	30	29	14	42
m	L	A		C	A	R	T	E		E	S	T		D	A	N	S		L	A		C	A	H	U	T	E	.

Les droites

Le vieux pirate se dit que ce n'est finalement pas une si bonne idée car si le bosco est de la partie, il faudra tout refaire. Il cherche alors une méthode géométrique.

Avec des points

Pour coder chaque caractère, il donne à chacun les coordonnées d'un point du plan. Le numéro du caractère est l'ordonnée à l'origine de la droite qui les relie. Par exemple, le vieux pirate donne le point A(-8;36) au **Second** et C(12;26) au Canonnier.

Ils tracent la droite (AC) qui coupe l'axe des ordonnées au point B(0;32).

Le caractère dont le code est 32 est le W.

Vous voyez bien qu'avec un seul point, chacun ne peut strictement rien déduire.

Le message secret

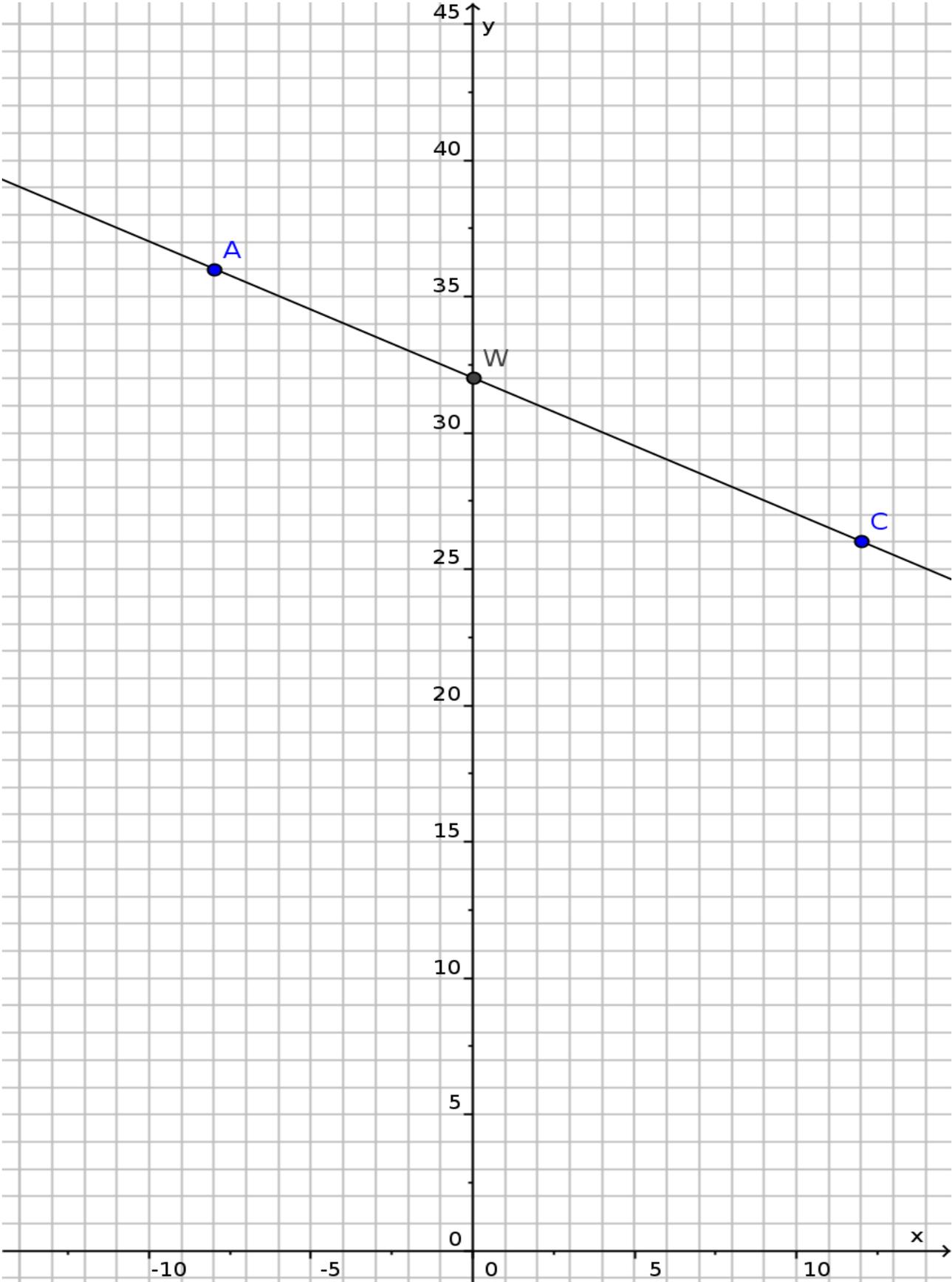
Le vieux pirate donne alors discrètement au **Second** les messages codés suivants :

Second	(-2;23)	(-2;22)	(-4;32)	(1;17)	(-2;30)	(3;20)	(5;24)	(-4;23)
Canonnier								
nombre								
caractère								
Second	(3;3)	(4;5)	(4;35)	(-3;0)	(-3;0)	(1;39)	(9;20)	
Canonnier								
nombre								
caractère								
Second	(6;0)	(-2;-1)	(8;36)	(-3;2)	(6;-1)	(14;43)	(-16;24)	
Canonnier								
nombre								
caractère								

Sur quelle île est enterré le trésor ?

Le graphique

Chers lieutenants, le capitaine vous donne ce graphique pour trouver l'île.



Par le calcul

Le Canonnier est malin, il a trouvé un moyen pour trouver le caractère en un seul calcul.

En fait, il s'agit de calculer l'ordonnée à l'origine d'une droite passant par deux points.

Reprenons le cas de la droite (AC) de l'exemple. On a A(-8;36) et C(12;26).

La droite (AC) représente une fonction affine f telle que $f(x)=ax+b$, ce qui veut dire que tous les points de la droite ont des coordonnées de la forme $(x;f(x))$, c'est-à-dire $(x;ax+b)$.

a est le coefficient directeur de la droite et b est son ordonnée à l'origine.

Or on sait que $f(-8)=36$ donc $a \times (-8)+b=36$, $-8a+b=36$.

On sait aussi que $f(12)=26$ donc $a \times 12=26$, $12a+b=26$.

Regardez bien les deux équations : on voit b tout seul dans les deux.

Cela veut dire que, dans la première, $b=36+8a$ et dans la deuxième que $b=26-12a$. Il s'agit du même b !

Donc $36+8a=26-12a$. On transpose : $8a+12a=26-36$, $20a=-10$ et $a=-1/2$.

On remplace dans l'une des équations, par exemple la deuxième : $12 \times (-1/2)+b=26$ donc $-6+b=26$ et $b=32$.

Le Canonnier a bien observé le calcul, il voit que $a = \frac{26-36}{12-(-8)} = \frac{f(12)-f(-8)}{12-(-8)}$.

Et de même pour calculer b , il a vu que $12 \times a + b = f(12)$ donc que $b = f(12) - 12 \times a$, c'est-à-dire que $b = f(12) - 12 \times \frac{f(12)-f(-8)}{12-(-8)}$.

Voilà sa formule. En fait, si le vieux pirate donne au **Second** le point $(x_s; y_s)$ et au Canonnier le point $(x_c; y_c)$ alors le caractère a le numéro $y_s - x_s \times \frac{y_s - y_c}{x_s - x_c}$.

Je vous laisse vérifier la technique du Canonnier :

Le **Second** a lui aussi réfléchi. Il dit au vieux pirate qu'on peut partager le secret avec le Maître d'équipage (ou bosco), il suffit de lui donner une liste de points comme aux deux autres.

Dans ce cas, deux des trois sous-officiers peuvent déchiffrer le message.

Intersection de droites

Le Canonnier a proposé sa technique au vieux pirate. Mille sabords, se dit-il, ces jeunes loups deviendront de vieux loups de mer comme moi.

Il change alors de technique.

Avec les paramètres

Cette fois, il donne les paramètres a (le coefficient) et b (l'ordonnée à l'origine) d'une fonction affine.

Le caractère a pour numéro l'ordonnée du point d'intersection.

Par exemple, il donne au **Second** $a=-0,5$ $b=32$ et au Canonnier $a=1$ $b=23$.

Il a donné au **Second** la fonction affine $x \mapsto -0,5x+32$ et au Canonnier la fonction affine $x \mapsto 1x+23=x+23$.

Chacun des deux trace la droite qui représente sa fonction affine. Elle se coupent au point de coordonnées (4;29) et 29 représente la lettre T.

Note : La droite du **Second** est la droite (AC) du graphique.

Exemple

Le vieux pirate donne au **Second** $a=2$, $b=10$ et au Canonnier $a=-2$, $b=26$.

Tracer les deux droites qui représentent $x \mapsto 2x+10$ et $x \mapsto -2x+26$, elles se coupent au point de coordonnées ($x=$; $y=$), le caractère est un .

Le dernier message secret

Ça y est, les deux lieutenants vont pouvoir trouver la position exacte du trésor.

Utilisez le graphique précédent.

	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
Second	0	25	-2	31	1	12	-2	24	1/2	21	-1	32	1	28
Canonnier														
y						14								
caractère						E								

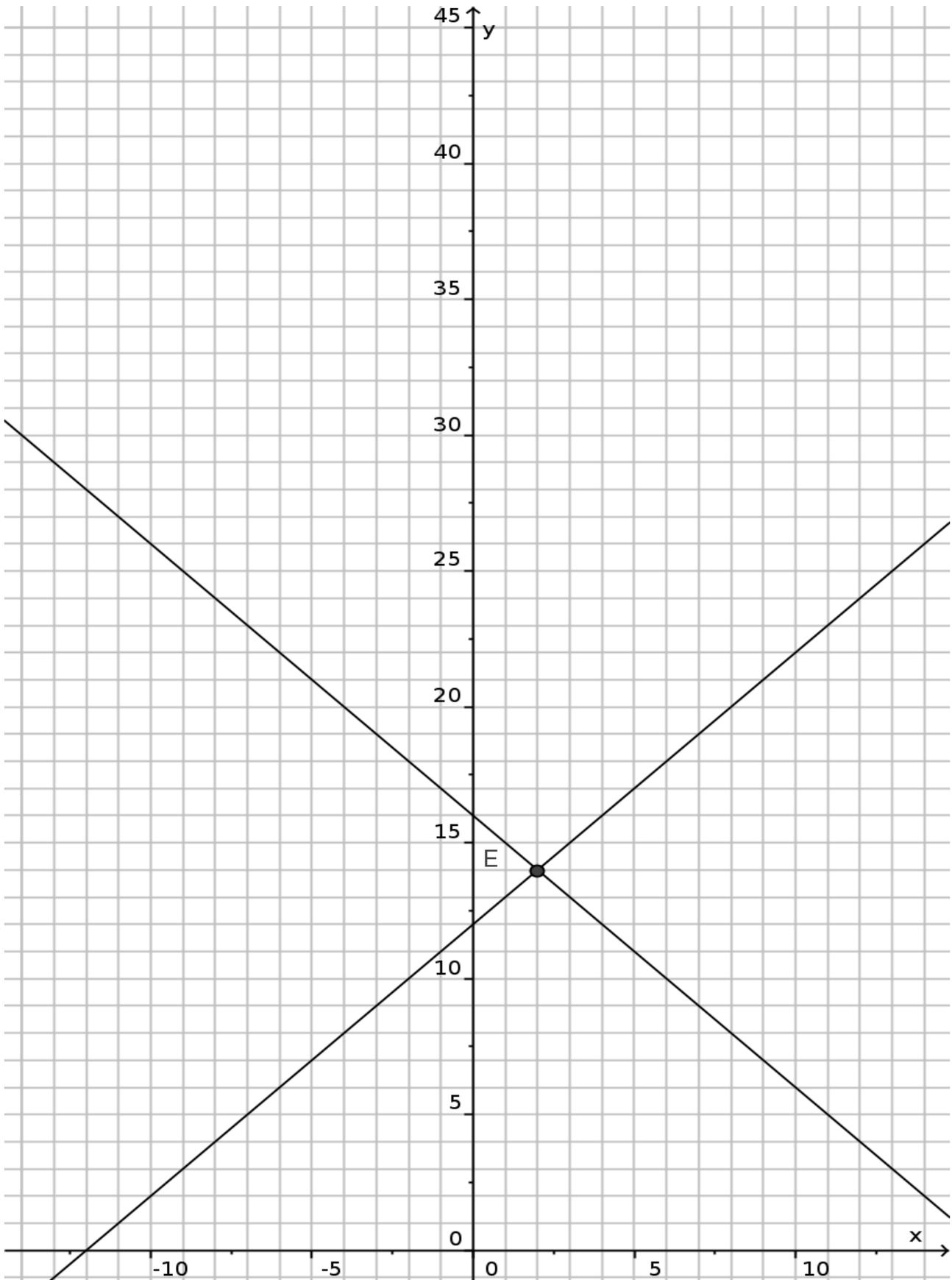
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
Second	1	0	1/2	2	-1	2	2	18	2	24	1	45	2/3	22
Canonnier														
y		2												
caractère		2												

	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
Second	1	7	-1	0	1	11	1	0	-3/2	35	1/2	14	1/2	13
Canonnier														
y				10										
caractère				A										

Dans quoi doivent-ils creuser (sable, pierre, terre)?

Le graphique

Utilisez ce graphique pour aider les deux lieutenants.



Par le calcul

Le Second se demande s'il ne pourrait pas trouver une méthode avec un calcul.

Il reprend l'exemple donné par le vieux pirate : $x \mapsto -0,5x+32$ et $x \mapsto 1x+23$.

Il se dit qu'au point où les deux droites se coupent, les images des deux fonctions sont égales. Il a alors $-0,5x+32=1x+23$.

Il ajoute $0,5x$ de chaque côté de l'égalité, il obtient $32=1x+23+0,5x$.

En effet, à gauche, $-0,5x+0,5x=0x=0$.

Il poursuit et simplifie à droite : $32=23+1,5x$.

Comme $23+9=32$, cela veut dire que $1,5x=32-23=9$.

Donc $x=6$ et $y=1 \times 6+23=29$.

Lui aussi a bien observé le calcul, il a vu que $x = -\frac{32-23}{1-(-0,5)}$, que $y=1x+23$, et donc

que $y = 1 \times -\frac{32-23}{1-(-0,5)} + 23$.

Voilà sa formule. En fait, si le vieux pirate donne au Second les coefficients a_s et b_s et au **Canonier** les coefficients a_c et b_c alors le point d'intersection des deux

droites a pour abscisse $x = -\frac{b_s - b_c}{a_s - a_c}$ et pour ordonnée :

$$y = a_c \times -\frac{b_s - b_c}{a_s - a_c} + b_c = b_c - a_c \times \frac{b_s - b_c}{a_s - a_c}$$

Il remarque que ça ressemble beaucoup au résultat du **Canonier**.

Je vous laisse vérifier la technique du Second :

Le Second compris qu'il peut encore utiliser cette technique pour partager le secret à trois et où deux sur les trois peuvent retrouver le secret.

Et vous ?

Le vieux pirate commence à se sentir dépassé et se dit qu'il a réussi.

Il peut léguer son trésor en paix, la relève est assurée.

Note : Le genre de calculs rencontré dans ce DM est vraiment utilisé quand on veut partager un secret entre plusieurs personnes.