

Les droites

Le vieux pirate se dit que ce n'est finalement pas une si bonne idée car les deux lieutenants sont rusés. Comme il n'y a que 45 caractères, le code d'un des deux donne une indication sur l'intervalle où se trouve le code de l'autre. Et moins on donne d'indices, mieux c'est.

Avec des points

Il cherche alors une méthode géométrique.

Pour coder chaque caractère, il donne à chacun les coordonnées d'un point du plan. Le numéro du caractère est l'ordonnée à l'origine de la droite qui les relie.

Par exemple, le vieux pirate donne le point A(-8;36) au Second et C(12;26) au Canonnier.

Ils tracent la droite (AC) qui coupe l'axe des ordonnées au point B(0;32).

Le caractère dont le code est 32 est le W.

Vous voyez bien qu'avec un seul point, chacun ne peut strictement rien déduire.

Exemple

Utilisez le graphique qui se trouve à la page suivante. **Soyez précis !**

Placer les points D(-3;21) et E(-9;23).

Tracez la droite (DE), elle coupe l'axe des ordonnées au point F.

Son ordonnée est :

Et la lettre est :

Le message secret

Le vieux pirate donne alors discrètement à ses deux lieutenants les messages codés suivants :

Second	(-2;23)	(-2;22)	(-4;32)	(1;17)	(-2;30)	(3;20)	(5;24)	(-4;23)
Canonnier	(-1;24)	(-1;23)	(-2;30)	(3;15)	(2;28)	(-6;14)	(-2;24)	(-6;23)
nombre	25							
caractère	P							

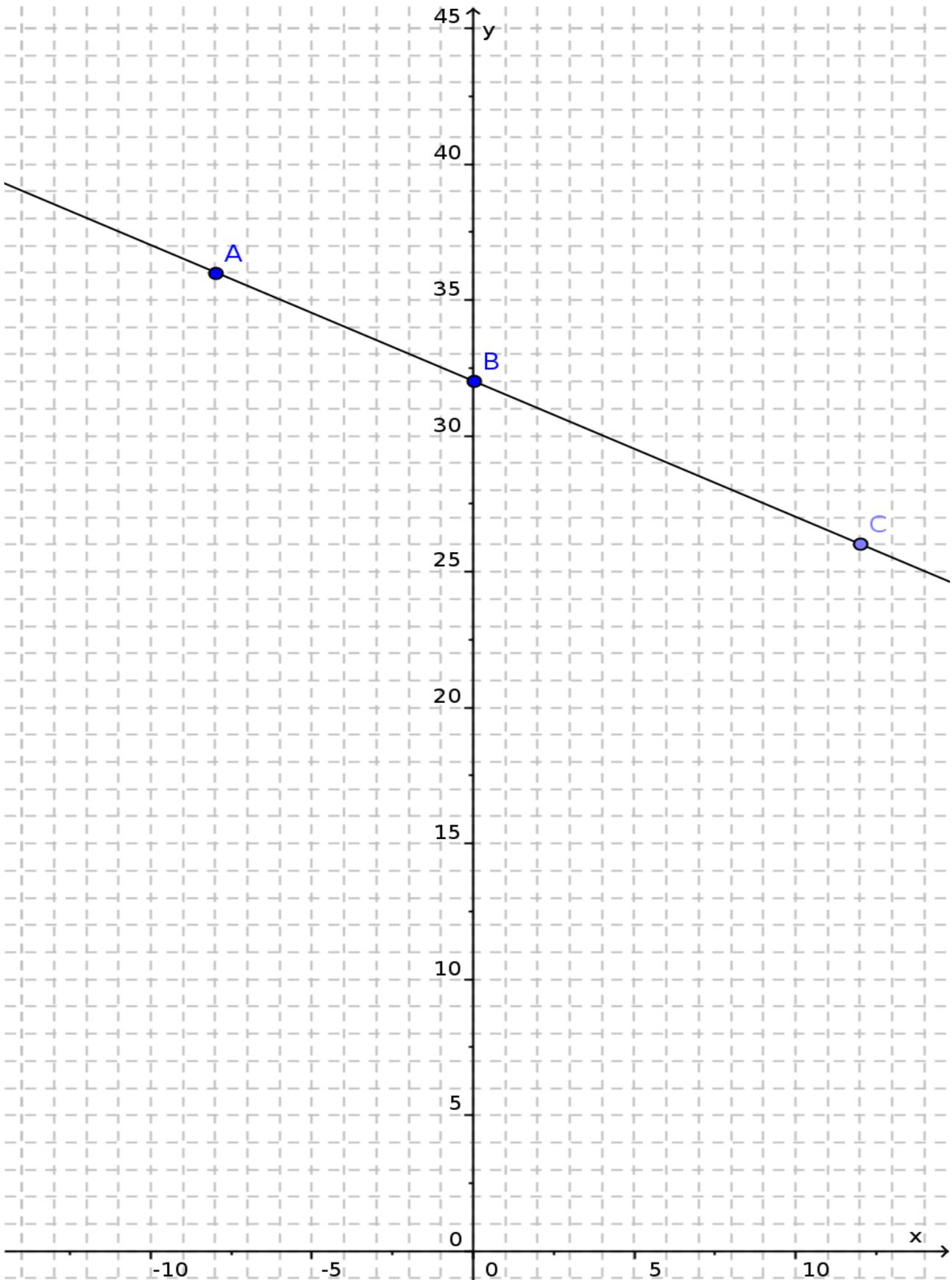
Second	(3;3)	(4;5)	(4;35)	(-3;0)	(-3;0)	(1;39)	(9;20)
Canonnier	(6;5)	(6;4)	(-8;38)	(-4;-1)	(3;14)	(3;45)	(12;19)
nombre							
caractère							

Second	(6;0)	(-2;-1)	(8;36)	(-3;2)	(6;-1)	(14;43)	(-16;24)
Canonnier	(7;-1)	(-3;-2)	(15;36)	(-9;-2)	(8;-4)	(16;44)	(20;24)
nombre							
caractère							

Sur quelle île est enterré le trésor ?

Le graphique

Utilisez ce graphique pour aider les deux lieutenants.



Par le calcul

Le Canonnier est malin, il a trouvé un moyen pour trouver le caractère en un seul calcul.

En fait, il s'agit de calculer l'ordonnée à l'origine d'une droite passant par deux points.

Reprenons le cas de la droite (AC) de l'exemple. On a A(-8;36) et C(12;26).

La droite (AC) représente une fonction affine f telle que $f(x)=ax+b$, ce qui veut dire que tous les points de la droite ont des coordonnées de la forme $(x;f(x))$, c'est-à-dire $(x;ax+b)$.

a est le coefficient directeur de la droite et b est son ordonnée à l'origine.

Or on sait que $f(-8)=36$ donc $a \times (-8) + b = 36$, $-8a + b = 36$.

On sait aussi que $f(12)=26$ donc $a \times 12 = 26$, $12a + b = 26$.

Regardez bien les deux équations : on voit b tout seul dans les deux.

Cela veut dire que, dans la première, $b = 36 + 8a$ et dans la deuxième que $b = 26 - 12a$. Il s'agit du même b !

Donc $36 + 8a = 26 - 12a$. On transpose : $8a + 12a = 26 - 36$, $20a = -10$ et $a = -1/2$.

On remplace dans l'une des équations, par exemple la deuxième : $12 \times (-1/2) + b = 26$ donc $-6 + b = 26$ et $b = 32$.

Le Canonnier a bien observé le calcul, il voit que $a = \frac{26-36}{12-(-8)} = \frac{f(12)-f(-8)}{12-(-8)}$.

Et de même pour calculer b , il a vu que $12 \times a + b = f(12)$ donc que $b = f(12) - 12 \times a$, c'est-à-dire que $b = f(12) - 12 \times \frac{f(12)-f(-8)}{12-(-8)}$.

Voilà sa formule. En fait, si le vieux pirate donne au Second le point $(x_s; y_s)$ et au Canonnier le point $(x_c; y_c)$ alors le caractère a le numéro $y_s - x_s \times \frac{y_s - y_c}{x_s - x_c}$.

Je vous laisse vérifier la technique du Canonnier :

Le Second a lui aussi réfléchi. Il dit au vieux pirate qu'on peut partager le secret avec le Maître d'équipage (ou bosco), il suffit de lui donner une liste de points comme aux deux autres.

Dans ce cas, deux des trois sous-officiers peuvent déchiffrer le message.

Intersection de droites

Le Canonnier a proposé sa technique au vieux pirate. Mille sabords, se dit-il, ces jeunes loups deviendront de vieux loups de mer comme moi.

Il change alors de technique.

Avec les paramètres

Cette fois, il donne les paramètres a (le coefficient) et b (l'ordonnée à l'origine) d'une fonction affine.

Le caractère a pour numéro l'ordonnée du point d'intersection.

Par exemple, il donne au Second $a=-0,5$ $b=32$ et au Canonnier $a=1$ $b=23$.

Il a donné au Second la fonction affine $x \mapsto -0,5x+32$ et au Canonnier la fonction affine $x \mapsto 1x+23=x+23$.

Chacun des deux trace la droite qui représente sa fonction affine. Elle se coupent au point de coordonnées (4;29) et 29 représente la lettre T.

Note : La droite du Second est la droite (AC) du graphique.

Exemple

Le vieux pirate donne au Second $a=2$, $b=10$ et au Canonnier $a=-2$, $b=26$.

Tracer les deux droites qui représentent $x \mapsto 2x+10$ et $x \mapsto -2x+26$, elles se coupent au point de coordonnées ($x=$; $y=$), le caractère est un .

Le dernier message secret

Ça y est, les deux lieutenants vont pouvoir trouver la position exacte du trésor.

Utilisez le graphique précédent.

	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
Second	0	25	-2	31	1	12	-2	24	1/2	21	-1	32	1	28
Canonnier	1	20	0	21	-1	16	2	12	-1/2	25	1	40	2	28
y						14								
caractère						E								

	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
Second	1	0	1/2	2	-1	2	2	18	2	24	1	45	2/3	22
Canonnier	-2	6	1	0	-2	4	1	20	3	18	0	29	1	21
y		2												
caractère		2												

	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
Second	1	7	-1	0	1	11	1	0	-3/2	35	1/2	14	1/2	13
Canonnier	-1	37	1/2	15	-1	43	0	29	1	0	1	7	1	5
y				10										
caractère				A										

Dans quoi doivent-il creuser (sable, pierre, terre)?

Par le calcul

Le Second se demande s'il ne pourrait pas trouver une méthode avec un calcul.

Il reprend l'exemple donné par le vieux pirate : $x \mapsto -0,5x+32$ et $x \mapsto 1x+23$.

Il se dit qu'au point où les deux droites se coupent, les images des deux fonctions sont égales. Il a alors $-0,5x+32=1x+23$.

Il ajoute $0,5x$ de chaque côté de l'égalité, il obtient $32=1x+23+0,5x$.

En effet, à gauche, $-0,5x+0,5x=0x=0$.

Il poursuit et simplifie à droite : $32=23+1,5x$.

Comme $23+9=32$, cela veut dire que $1,5x=32-23=9$.

Donc $x=6$ et $y=1 \times 6+23=29$.

Lui aussi a bien observé le calcul, il a vu que $x = -\frac{32-23}{1-(-0,5)}$, que $y=1x+23$, et

donc que $y = 1 \times -\frac{32-23}{1-(-0,5)} + 23$.

Voilà sa formule. En fait, si le vieux pirate donne au Second les coefficients a_s et b_s et au Canonier les coefficients a_c et b_c alors le point d'intersection des deux

droites a pour abscisse $x = -\frac{b_s - b_c}{a_s - a_c}$ et pour ordonnée :

$$y = a_c \times -\frac{b_s - b_c}{a_s - a_c} + b_c = b_c - a_c \times \frac{b_s - b_c}{a_s - a_c}$$

Il remarque que ça ressemble beaucoup au résultat du Canonier.

Je vous laisse vérifier la technique du Second :

Le Second compris qu'il peut encore utiliser cette technique pour partager le secret à trois et où deux sur les trois peuvent retrouver le secret.

Et vous ?

Le vieux pirate commence à se sentir dépassé et se dit qu'il a réussi.

Il peut léguer son trésor en paix, la relève est assurée.

Note : Le genre de calculs rencontré dans ce DM est vraiment utilisé quand on veut partager un secret entre plusieurs personnes.