Le tour de Josèphe

Vincent Beck, Philippe Grillot
Institut Denis Poisson, Université d'Orléans

Le tour de Josèphe est un classique des mathématiques récréatives, on le trouve, dès 1624 dans la seconde édition des *Problèmes plaisants et délectables* de Gaspard Bachet [BAC] mais des variantes sont déjà présentes chez Chuquet (1484) ou même encore plus tôt. Pour un historique détaillé de la vie de ce problème, on pourra consulter l'article [SIG] de Laurent Signac.

L'adaptation de ce tour a été testé avec de nombreux élèves de l'académie d'Orléans-Tours lors de l'opération Passage menée par l'IREM d'Orléans en 2014 ou lors de conférences pour des collégiens pour la fête de la science organisée par le lycée Vaucanson à Tours. Il a aussi fait partie d'une formation "Mathémagie" menée à la Maison pour la Science pour des professeurs des écoles et des professeurs de collège et lycée. Il a aussi testé avec succès auprès d'un public d'étudiantes et d'étudiants de licence en STAPS[1] dans le cadre d'une UE d'ouverture.

Ingrédients: un mathémagicien ou une mathémagicienne[2] et un public assez nombreux debout chacun ayant une chaise pour s'asseoir[3].

Préparation: la mathémagicienne[4] décide, en collaboration avec le public, d'un sens de parcours du public qui restera le même tout au long du tour. Le mathémagicien compte dans sa tête le nombre de personnes dans le public et annonce deux choses : la personne qui restera la dernière debout et le nombre qui sera le nombre annoncé par la dernière personne debout. Une variante possible est que la mathémagicienne s'insère à la bonne place pour rester la dernière debout[5].

Règle du jeu: Chacun à leur tour, dans l'ordre déterminé avec le mathémagicien, les membres du public annoncent le nombre entier qui suit celui de la personne précédente. Si le nombre annoncé est pair, la personne s'assoit. S'il est impair, elle reste debout. Lorsque chacun des membres du public est passé une fois, on revient au départ mais la suite des nombres annoncés par le public se poursuit. On continue ainsi le jeu jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une seule personne debout.

Annonces de la mathémagicienne: comment anticiper les résultats ? Si n est le nombre de membres du public, le dernier nombre annoncé est $2n-1$. Pour déterminer la position initiale de la dernière personne debout, on écrit $n = 2^k + r$ où $0 \leq r < 2^k$[6] et la position initiale de la personne qui reste debout est $2r+1$.

Justifications des annonces effectuées. Lorsque la dernière personne debout prononce le dernier nombre, $n-1$ personnes ont été éliminées. La dernière personne éliminée a donc prononcé $2(n-1)$. Ainsi le dernier nombre prononcé est bien $2n-1$. Pour convaincre le public, on peut faire remarquer que la première personne éliminée a dit $2 = 2 \times 1$, la deuxième personne éliminée a dit $4 = 2 \times 2$,...

Lorsque $n > 1$ est une puissance de 2, quand le premier tour a été effectué et que tout le monde a prononcé un nombre, la personne qui a parlé la première se retrouve à dire à nouveau un nombre impair et le nombre de personnes encore debout est encore une puissance de 2. Ainsi, la première personne se retrouve à dire à chaque fois un nombre impair jusqu'à ce qu'elle se retrouve seule. C'est donc elle qui est la dernière debout. Dans ce cas, on a $r = 0$ et $2r+1 = 1$. C'est le résultat annoncé.

Lorsque n n'est pas une puissance de 2, on écrit $n = 2^k + r$ avec $0 < r < 2^k$. On se ramène au cas précédent en éliminant les r personnes. Pour cela, il faut aller jusqu'au rang $2r$. La personne au rang $2r+1$ se retrouve alors à dire le nombre impair $2r+1$ alors que le nombre de personnes restant debout est une puissance de 2. C'est donc elle qui sera la dernière personne debout.

Remarque : Lien avec l'écriture binaire. Lorsqu'on écrit $n = a_k a_{k-1} \cdots a_0 = 2^k a_k + \cdots + a_0$ en base deux (avec $a_k = 1$), l'écriture en base deux de la position initiale de la dernière personne

[1] Sciences et Techniques des Activités Physiques et Sportives.

[2] ayant lu cette fiche bien entendu !

[3] Si le public n'est pas assez nombreux, on peut tripler le nombre de participants en faisant lever les bras de chacun des membres du public, le public baissant d'abord un bras puis l'autre avant de s'asseoir.

[4] Le genre utilisé pour désigner la personne qui réalise le tour a été décidé aléatoirement avec probabilité 1/2 pour chacune des occurrences.

[5] Attention à ne pas oublier de se compter !

[6] 2^k est la plus grande puissance de 2 plus petite que n.

debout sera : $a_{k-1}\cdots a_0a_k$. En effet, $r = a_{k-1}\cdots a_0$ et $2r+1 = a_{k-1}\cdots a_01 = a_{k-1}\cdots a_0a_k$.

Exemples: Si $n = 13$, on écrit $13 = 1101$, le magicien annonce alors que la dernière personne debout sera la $1011 = 11^{\text{e}}$. On le retrouve avec la première méthode proposée : $13 = 8+5$ et $2\times 5+1 = 11$.

Pistes de mise en œuvre: Suivant le temps dont on dispose, on peut se contenter de réaliser le tour avec le public deux, trois fois puis de donner l'explication rapide ci-dessus.

Lorsqu'on dispose de plus de temps, on peut faire chercher le public. Pour cela, on note d_n le dernier nombre prononcé et $J(n)$ la position initiale de la dernière personne debout lorsque le public a n personnes. On fait dresser le tableau des premières valeurs de d_n et $J(n)$ et on fait constater comment il fonctionne : à chaque puissance de 2, on tombe à $J(n) = 1$ puis $J(n)$ augmente de 2 en 2 jusqu'à la prochaine puissance de 2. Pour d_n, on avance de deux en deux.

On peut poser la question "Pourquoi les valeurs de $J(n)$ ne sont que des nombres impairs ?"

On peut alors aussi tenter de faire déterminer les relations de récurrence : $J(2m) = 2J(m)-1$ et $J(2m+1) = 2J(m)+1$. Voici quelques pistes pour arriver à ces relations de récurrence : on considère les m membres du public, on les symbolise par un $\circ$, on place un $\bullet$ à la $J(m)^{\text{e}}$:

$$\underbrace{\circ\circ\circ\circ\bullet\circ\circ\cdots\circ\circ\circ}_{m} \qquad (\mathbf{1})$$

Pour obtenir $J(2m)$, on ajoute alors m membres du public $\times$ dans les positions paires :

$$\underbrace{\circ\times\circ\times\circ\times\circ\times\bullet\times\circ\times\circ\times\cdots\circ\times\circ\times\circ\times}_{2m} \qquad (\mathbf{2})$$

Ainsi, après un premier passage, on se retrouve exactement dans la position $(\mathbf{1})$ et le nombre prononcé en commençant la ligne $(\mathbf{1})$ est impair donc $J(2m)$ est la position du $\bullet$ dans la ligne $(\mathbf{2})$. Il y a $J(m)-1$ couples $\circ\times$ avant $\bullet$, on obtient ainsi $J(2m) = 2(J(m)-1)+1 = 2J(m)-1$.

Pour obtenir $J(2m+1)$, on ajoute alors $m+1$ membres du public $\times$ de la façon suivante :

$$\underbrace{\times\times\circ\times\circ\times\circ\times\circ\times\bullet\times\circ\times\circ\times\cdots\circ\times\circ\times\circ}_{2m+1} \qquad (\mathbf{3})$$

Après un premier passage, on obtient $\times\circ\circ\circ\circ\bullet\circ\circ\cdots\circ\circ\circ$ en ayant terminé par un nombre impair. Le nombre suivant est alors pair et on obtient la position $(\mathbf{1})$ en devant dire un nombre impair. On en déduit que $J(2m+1)$ est la position de $\bullet$ dans la ligne $(\mathbf{3})$ c'est-à-dire on a $J(m)-1$ couple $\circ\times$ et deux $\times$. On obtient ainsi $J(2m+1) = 2J(m)+1$.

On peut aussi faire remarquer que les relations de récurrence redonnent le fait que $J(2m)$ et $J(2m+1)$ sont impairs !

Une fois ces relations de récurrence établies, on peut se diriger vers nouvelle façon d'écrire $J(n)$. Tout d'abord, grâce à la relation de récurrence, on obtient que $J(2^n) = 1$ pour tout n. Par ailleurs, le tableau initial incite à écrire un nombre sous la forme $n = 2^\ell + r$ avec $r < 2^\ell$. On montre alors que $J(n) = 2r+1$. Une première façon est d'utiliser les relations de récurrence en montrant que la fonction $n = 2^\ell + r \mapsto 2r+1$ vérifie la même relation de récurrence. Une autre façon de faire est de commencer par faire asseoir r personnes comme on l'a vu plus haut[7].

On peut alors poser la question, quand est-ce que $J(n) = n$? Que se passe-t-il si on applique J plein de fois de suite ? Quand est-ce que $J(n) = n/2$?

Pour poursuivre le travail et aller plus loin. Que se passe-t-il si on fait asseoir deux personnes sur 3 ? On note $J_3(n)$ la position initiale de la dernière personne debout avec cette nouvelle règle quand il y a n personnes au départ. Avec le même argument de $\circ$ et $\times$ (mais on insère deux $\times$ à chaque fois pour passer à $3m$ et on ajuste le départ pour régulariser la congruence modulo 3), on arrive aux formules de récurrence suivante :

1. $J_3(3m) = 3J(m)-2$ via

$$\underbrace{\circ\times\times\circ\times\times\bullet\times\times\circ\times\times\cdots\circ\times\times\circ\times\times}_{3m}$$

[7] Merci aux premières pages du livre Concrete Mathematics de Graham, Knuth et Patashnik [GKP] pour cette jolie démonstration.

2. $J_3(3m+4) = 3J(m)+4$ via

$$\underbrace{\times\times\times\times\times\times\circ\times\times\cdots\bullet\times\times\circ\times\times\cdots\circ\times\times\circ}_{3m+4}$$

après le premier passage, on se retrouve avec

$$\times\times\circ\circ\circ\circ\bullet\circ\circ\cdots\circ\circ\circ$$

en ayant fini par $3m+4$ qui est congru à 1 modulo 3, on va donc éliminer les deux suivants et commencer avec les m restants sur un nombre congru à 1 modulo 3.

3. $J_3(3m+2) = 3J(m)+1$ via

$$\underbrace{\times\times\times\circ\times\times\circ\times\times\bullet\times\times\circ\times\times\cdots\circ\times\times\circ\times}_{3m+2}$$

après le premier passage, on se retrouve avec

$$\times\circ\circ\circ\circ\bullet\circ\circ\cdots\circ\circ\circ$$

en ayant fini par $3m+2$ qui est congru à 2 modulo 3, on va donc éliminer le suivant et commencer avec les m restants sur un nombre congru à 1 modulo 3.

On peut bien sûr par la même technique obtenir des relations de récurrence pour $J_4(n)$ [8] en insérant trois $\times$ entre deux $\circ$ et plus généralement pour $J_k(n)$ [9] en insérant $(k-1)\times$ entre deux $\circ$. De plus, pour obtenir les différentes congruences modulo k, on agit de la façon suivante : si n est congru à r modulo k, alors on ajoute $k-r$ paquets de k $\times$ au début de la ligne et après le dernier $\circ$, on place $(r-1)$ $\times$ (ou on en retire $k-r$ si on considère qu'on avait déjà placé $(k-1)$ $\times$ après le dernier $\circ$).

On aboutit ainsi aux relations de récurrence

$r=0$: $J_k(k\ell) = (J(\ell)-1)k+1 = kJ(\ell)-k+1$.

$r=1$: $J_k(k\ell+k(k-1)-(k-1)) = J(k\ell+(k-1)^2) = k(k-1)+k(J(\ell)-1)+1 = kJ(\ell)+(k-1)^2$.

$r=2$: $J_k(k\ell+k(k-2)-(k-2)) = J(k\ell+(k-1)(k-2)) = k(k-2)+k(J(\ell)-1)+1 = kJ(\ell)+k(k-3)+1$.

r: $J_k(k\ell+k(k-r)-(k-r)) = J(k\ell+(k-1)(k-r)) = k(k-r)+k(J(\ell)-1)+1 = kJ(\ell)+k(k-r-1)+1$.

$r=k-1$: $J_k(k\ell+k-1) = k+k(J(\ell)-1)+1 = kJ(\ell)+1$.

En poursuivant le raisonnement avec les $\circ$ et les $\times$, on obtient $J_k(k^\ell) = 1$ pour tout ℓ. Et en adaptant le raisonnement de Graham, Knuth et Patashnik [GKP] qui donnait $J(2^\ell+r) = 2r+1$ (avec $r < 2^\ell$), on obtient que $J(k^\ell + s(k-1)) = sk+1$ lorsque $s(k-1) < k^\ell$. En effet, lorsqu'on élimine s paquets de $(k-1)$ personnes, on se retrouve en position $1+ks$ en disant un nombre congru à 1 modulo k et il reste k^ℓ personnes.

Un autre axe de travail : les permutations.

Dans la version où on élimine une personne sur deux, on peut chercher aussi le numéro de l'avant-dernière personne éliminée, puis de l'antépénultième personne et ainsi de suite. On obtient ainsi une permutation de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. Une autre façon d'obtenir cette permutation est de considérer un paquet de n cartes et de le mélanger de la façon suivante :

- je prends le paquet dans ma main;
- je prends la première carte du paquet et je la glisse sous le paquet;
- je prends la carte suivante du paquet et je la mets sur la table;
- je prends la carte suivante du paquet et je la glisse sous le paquet;

[8] $J_4(n)$ est la position initiale de la dernière personne debout quand il y a n personnes au départ lorsqu'on élimine 3 personnes sur 4

[9] $J_k(n)$ est la position initiale de la dernière personne debout quand il y a n personnes au départ lorsqu'on élimine $k-1$ personnes sur k

- je prends la carte suivante du paquet et je la mets sur la table sur la carte qui est déjà sur la table;
- ainsi de suite...

On continue jusqu'à ce que toutes les cartes se retrouvent sur la table. La première carte du nouveau paquet est la carte numéro $J(n)$ du paquet initial. La dernière carte du nouveau paquet est la carte numéro 2 du paquet initial.

On peut alors recommencer le même mélange sur le nouveau paquet et ainsi de suite jusqu'à retomber sur le paquet dans l'ordre initial. Au fait, est-on sûr d'y arriver ? Combien de fois faut-il mélanger pour y arriver ? Avec 3 cartes, 4 cartes, 5 cartes,... [10]

Histoire[11]: Flavius Josèphe a vécu à la fin du premier siècle de notre ère. Il a été l'un des plus importants historiographes de l'antiquité. Il s'est notamment intéressé aux relations entre Rome et Jérusalem.

Il participe du côté des juifs à la première guerre judéo-romaine de 66. Mais lors de la campagne de Vespasien en 67, il raconte qu'il est piégé dans une grotte avec quarante de ses compagnons qui se livrent à un suicide collectif dont seul un de ses compagnons et lui survivent. La légende du tour de Josèphe provient des règles choisie pour le suicide collectif : les quarante se seraient mis en rond et suicidés à tour de rôle en sautant une personne sur deux (voir [SIG] pour des éléments bien plus précis sur les variantes de cette histoire). Josèphe et son compagnon auraient choisi leur place pour être les deux derniers [12]. Ils se rendent alors à Vespasien auquel Josèphe promet l'empire. Suite à cela, Josèphe devient interprète et négociateur entre romains et juifs, ces derniers le considérant comme un traître. Il s'installe ensuite à Rome protégé par l'empereur et rédige ses nombreux écrits.

References

[BAC] G. Bachet. *Problèmes plaisants et délectables.* Deuxème edition, 1624.

[GKP] Ronald L Graham, Donald Ervin Knuth, et Oren Patashnik. *Concrete Mathematics.* Addison Wesley, Reading, MA, 1994.

[SIG] L. Signac. Autour du problème de josèphe. *bibnum*, 2012. HAL.

[10] Quelques éléments de réponses à la question en suivant ce lien vers "Images de maths".
[11] Essentiellement extrait de Wikipédia
[12] Finalement, les mathématiques étaient à l'époque bien plus sélective qu'elles ne le sont aujourd'hui.