Rigide ou déformable ?

J. Barré[1]

May 24, 2024

1 Introduction

Niveau : J'ai effectué cette activité avec des collégiens et des lycéens; elle peut sans doute être adaptée à des élèves de CM1-CM2, voire plus jeunes.
Durée : Très variable, selon le temps que l'on donne aux élèves pour expérimenter et élaborer eux-mêmes leurs questions et leur réponses. Cela peut aller d'un exposé interactif de 30-45 mn, jusqu'à un projet de longue haleine de type "Maths en Jeans". J'ai également utilisé ce thème pour des séances de 2h environ dans le cadre des "colonies mathématiques" du Centre Galois à Orléans, et pour un stage "Hippocampe" de 2 jours d'initiation à la recherche à Nice. Je décris ci-dessous une activité d'environ 2h.
Matériel : Des boules et barres aimantées d'un jeu de construction magnétique, type "geomag". Les élèves peuvent être en groupe de 2 à 4, chaque groupe doit avoir suffisamment de matériel pour manipuler.
Objectifs : Déterminer à quelles conditions une structure construite avec des boules et des barres aimantées est rigide ou déformable. Cette activité peut être une introduction à la recherche et à la modélisation : il s'agit d'expérimenter, de relier une situation concrète avec des concepts mathématiques, et, en partie, de déterminer soi-même les questions qu'on cherche à résoudre.

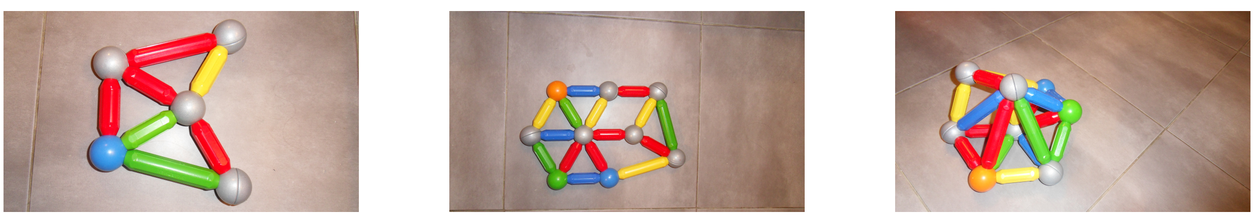

Figure 1: Structures de boules et arêtes en 2D et 3D. Celle de gauche est rigide; et celle du milieu ? Indication : elle contient 9 boules et 15 arêtes. A droite un exemple en 3D, avec 8 boules et 17 arêtes. Rigide ou déformable ?

2 Déroulement

- **Introduction** La séance débute par la présentation de constructions rigides et de constructions déformables. On remarque que pour de très petites constructions, les élèves peuvent déterminer si elle sont rigides en les regardant. Mais à partir de 7 ou 8 boules, ce n'est pas facile ! Faire l'expérience et manipuler l'assemblage permet alors de répondre à la question; mais quand on augmente encore la taille, les expériences deviennent vite impraticables. Il est donc nécessaire d'avoir une compréhension théorique du problème.

[1]Institut Denis Poisson, UMR CNRS 7013, Université d'Orléans et Université de Tours

- **Questions de départ** Une réflexion collective permet de guider les élèves en suscitant des questions un peu plus précises. Ils remarquent facilement que plus il y a de barres, plus la construction tend à être rigide, et inversement pour le nombre de boules. Peut-on être plus précis ? Est-ce que le caractère rigide ou déformable ne dépend que de la composition de l'assemblage ?

- **Expériences, élaboration de réponses** Les élèves manipulent ensuite en groupe, et font en général différentes découvertes, par différentes voies, qui se ramènent à ce constat : pour une structure en deux dimensions avec n boules, il faut au minimum $2n - 3$ arêtes pour la rendre rigide. Les groupes qui manipulent en trois dimensions doivent trouver un minimum de $3n - 6$ arêtes.

- **Mise en commun, nouvelles questions** La mise en commun entre groupes est en général l'occasion pour les différents groupes de constater qu'ils sont arrivés au même résultat par des voies différentes. On peut ensuite essayer de comprendre d'où viennent les $2n - 3$ et $3n - 6$. On peut aussi remarquer que la présence de $2n - 3$ arêtes est une condition nécessaire pour former un assemblage rigide, mais pas suffisante : les arêtes doivent aussi être "bien placées".

- **Conclusions, pour aller plus loin** La séance peut se terminer par davantage de questions : Et en dimension 4 ? En dimension 1 ? Et éventuellement par des explications de certaines applications pratiques.

3 Explications, et pour aller plus loin

La notion clé que les élèves vont découvrir petit à petit est celle de "degré de liberté" : en deux dimensions, une boule a deux directions pour bouger, donc deux degrés de liberté; chaque arête, en fixant la distance entre deux boules, ajoute une contrainte, donc enlève un degré de liberté; comme un assemblage rigide conserve toujours au moins trois degrés de liberté (deux translations, une rotation), on comprend ainsi le $2n-3$. Le même raisonnement en trois dimensions conduit au $3n-6$. La structure de droite de la figure 1 est donc déformable...

Ce raisonnement fournit le nombre minimal d'arêtes nécessaire pour rigidifier un assemblage. Encore faut-il que ces arêtes soient "bien réparties", de telle sorte qu'il n'y ait pas de zones "surcontraintes" et d'autres "sous-contraintes", qui resteraient déformables. Un théorème dû à Laman [1] donne une caractérisation précise de ce que veux dire "arêtes bien réparties", en deux dimensions : l'assemblage, vu comme un graphe, ne doit pas contenir de sous-graphe avec n_b boules et strictement plus de $2n_b - 3$ arêtes. Il est remarquable que cette caractérisation de Laman ne s'étend pas au cas de la dimension 3 !

Les références [2, 3] contiennent des explications plus détaillées, par exemple sur les conditions d'application du théorème de Laman (non vérifiées dans le cas des geomag...), sur sa mise en oeuvre algorithmique, ou sur les applications pratiques de cette théorie de la rigidité. Le site web [4] du groupe de recherche d'Ileana Streinu (University of Massachusetts) contient des vidéos et des explications.

References

[1] G. Laman, *J. Eng. Math.* **4**, 331 (1970).

[2] J. Barré, Images des Maths (2014). Rigidité et percolation. http://images.math.cnrs.fr/Rigidite-et-percolation

[3] J. Barré (2014). Percolation de la rigidité. Gazette des Mathématiciens, 142, 7.

[4] http://linkage.cs.umass.edu/pg/