La prison

Matériel pour l'atelier

- Une prison par groupe de 2 personnes
- Des feuilles A4, des stylos
- 1 paperboard

Les prisons sont des modèles de taille horizontale 24x20 et hauteur 14, en cm avec une figurine et une chaîne. Ils se démontent et tiennent dans une boîte en carton un peu moins haute et éventuellement plus longue.

Installation de l'atelier

Monter les prisons.

Déroulement de l'atelier pour des scolaires

Histoire à raconter : vous êtes prisonnier. On vous attache une longue chaîne terminée par deux menottes. On commence par attacher l'une des menottes sur un bras et on vous demande d'enrouler vous-même la chaîne aux barreaux puis on vous attache l'autre menotte sur l'autre bras. Le préposé aux profondeurs vient ensuite voir si vous n'avez pas fait un faux nœud, auquel cas il vous attrape et vous jette aux oubliettes. Sinon le gardien a reçu l'ordre de scier un des barreaux de la prison. Si vous êtes libre... vous pouvez partir et avez en plus gagné une longue chaîne. Mais il faut savoir deux choses : le gardien déteste perdre un prisonnier, et il est très doué en théorie des nœuds.

Pour chaque groupe de 2 : tour à tour l'un des élèves joue le prisonnier, l'autre élève le gardien.
Si le temps le permet, passer jouer les 2 rôles dans chaque groupe, en gagnant à chaque fois si on ne commet pas d'erreur (voir plus loin la stratégie).
Sinon, faire une démo que tout le monde regarde (c'est bien d'avoir un grand modèle de la prison pour cela, ou une caméra reliée à un vidéoprojecteur directement ou indirectement).

On peut, si on veut, dire : « je vais faire le nœud magique, qui gagne à tous les coups ».

Guidage :

Commencer par la version à deux barreaux de l’épreuve.

Faire découvrir que nombre d’enroulement donne un critère nécessaire. (Ce critère se trouve être suffisant dans le problème à deux barreaux.)

Introduire la notation : on utilise une lettre à chaque fois que la chaîne passe *derrière* un barreau. On surmonte la lettre d'une flèche qui indique le sens de passage de la chaîne derrière le barreau. Pour des raisons de facilité dans ce document je note a et **a** au lieu de $\overrightarrow{a}$ et $\overleftarrow{a}$. On obtient des « mots » du genre b**ab**c. On peut choisir bien sûr une autre notation par exemple +a et -a ou a et $\bar{a}$, ou encore a et A, a et a^{-1}, a et a’, etc.

Faire prendre conscience que :

- a**a** ainsi que **a**a reviennent à ne rien faire : si on tire sur la chaîne la boucle se réduit
- idem au milieu d’un mot : ça s’annule
- l’inverse d’un mot l’annule : il consiste à effectuer les opérations inverses et dans l’autre sens
- retirer un mot revient à retirer toutes les occurrences de la lettre correspondante
- a priori on ne peut pas permuter les lettres : ab et ba ce n’est pas la même chose

Ci dessous je cite la *condition de tresse* : quand on suit la chaîne depuis un bras vers l’autre elle chaque maillon passe systématiquement au dessus des précédents.
On admet que, sous la condition de tresse, la chaîne est libre si et seulement si le mot se réduit au mot vide.

Retirer un barreau est équivalent à retirer toutes les lettres du mot.

Le problème devient un problème de jeu sur des symboles : trouver un mot réduit et non vide qui va se réduire au mot vide si on lui retire toutes les occurrences de n’importe quelle lettre.

Pour trouver la solution générale, la technique est le commutateur : si u,v désigne des mots et u’,v’ leurs inverses, le commutateur de u et v est uvu’v’. Alors le commutateur de deux solutions sur des barreaux indépendants est une solution pour la réunion de ces barreaux.

Le mot inverse s’obtient en renversant l’ordre des lettres et en chageant le sens de passage de chacune (a devient **a** et **a** devient a).

Note culturelle

Le domaine s’appelle la *théorie des tresses*. C’est un sous-ensemble de la *théorie des nœuds*. Notre modélisations donne ce qu’on appelle le groupe libre à 4 générateurs (4=nb de barreaux). C’est donc aussi de la *théorie des groupes*.

S’ils sont très avancés (improbable) on peut étudier des variantes : trouver une solution qui se libère si et seulement si on a retiré deux barreaux ou plus.

Déroulement de l'atelier pour le grand public

Dans le cadre d'un accès libre, des fiches ont été conçues mais nous avons noté qu'elles sont peu lues : l'intervention d'un médiateur reste déterminante. Le déroulé est similaire au déroulé pour les classes.

Solutions

À 2 barreaux : ab**ab**

Une méthode pour passer d'une solution à k barreaux à une solution avec un k+1-ème barreau z : prendre la solution u pour k-1 barreaux puis former le mot uzu'z'.

Application de cette méthode pour passer de 2 à 3 barreaux : ab**ab**cba**bac**

Continuer cette méthode donne une solution *non-optimale* et dont le nombre de lettres u_n vérifie $u_{n+1} = 2*(1+u_n)$, c'est à dire $u_1= 1$, $u_2= 4$, $u_3=10$, $u_4=22$, 46, 94, 190, $u_8=382$
et plus généralement $u_n = 3x2^{n-1}-2$.

Méthode plus efficace : si n est pair, n = 2p, prendre une solution les p premiers barreaux, on la note u, prendre la même solution pour les p autres, on la note v, faire uvu'v'. D'où $u_n = 4u_p$.
On obtient pour $n=2^k$, une solution à n^2 lettres

> Si on mélange cette méthode pour n pair et la précédente pour n impair on obtient :
> $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 10$, $u_4 = 16$, $u_5 = 34$, $u_6 = 40$, $u_7 = 82$, u8 = 64, … $u_{15} = 658$, $u_{16} = 256$, etc.
> Si n>1 est une puissance de deux, $n=2^k$, $u_{n-1} = (9x8^{k-1}-2)/7$ qui croît « en n^3 » ce qui n'est toujours pas optimal.

Enfin pour n quelconque on peut toujours prendre une décomposition n = a + b, une solution u du pb pour a barreaux, une solution v du pb pour b barreaux, et faire uvu'v'.
On a alors $u_n = \min 2*(u_a+u_b)$ où a et b parcourent les solutions de « a+b=n ». Cela donne
$u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 10$, $u_4 = 16$, $u_5 = 28$, $u_6 = 40$, $u_7 = 52$, $u_8 = 64$, $u_9 = 88$, 112, 136, 160, 184, 208, $u_{15} = 232$, $u_{16} = 256$
Qui est beaucoup mieux (est-ce optimal ?)

Exemple à 4 barreaux : ab**ab**cd**cd**ba**ba**dc**dc**

Atelier conçu par Arnaud Chéritat,
adapté du problème connu sous le nom du *tableau de la belle-mère*.