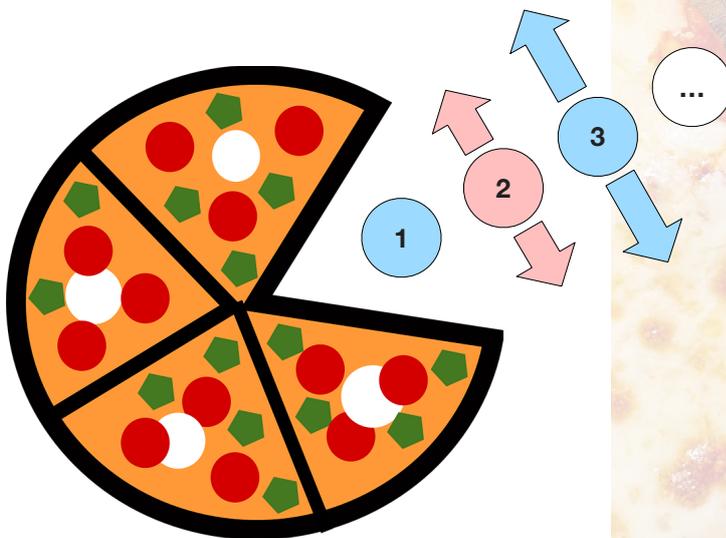




QUI MANGERA LE PLUS DE PIZZA ?

Une pizza a été découpée n'importe comment, et toutes les parts ne sont pas égales. Vous et votre ami avez décidé de vous partager la pizza de la façon suivante :

choisissez d'abord n'importe quelle part **1** ;
ensuite, votre ami **2** et vous **3** choisirez
une part à tour de rôle **...**, en respectant la
règle suivante :
il faut choisir une part adjacente à une part déjà
choisie. (Ainsi, à chaque tour sauf au premier
et au dernier, il y a deux possibilités, de part et
d'autre des parts manquantes).



Le but est de manger le plus de pizza possible !

Jouez quelques parties du jeu de la pizza, pour essayer de découvrir les meilleures stratégies, puis essayez de répondre aux questions suivantes.

- Est-ce une bonne idée de toujours manger la plus grosse part possible ?
- Avec une pizza dont toutes les parts sont égales, le premier joueur gagne-t-il toujours ?
- Avec une pizza ayant un nombre pair de parts, le premier joueur est-il assuré de manger au moins la moitié de la pizza ? Si oui, comment ?
 - et avec un nombre impair de parts ?

La théorie des jeux

Ce problème fait partie de la théorie des jeux. Cette branche des mathématiques modélise les interactions entre deux joueurs (ou plus), chacun cherchant optimiser son gain. On y retrouve les jeux traditionnels, allant du plus simple (le morpion) au plus compliqué (les échecs ou le go). Mais les jeux les plus étudiés par les mathématiciens sont ceux qui permettent de modéliser des situations économiques ou sociologiques, ou encore ceux qui ont des liens avec des problèmes d'informatique théorique.

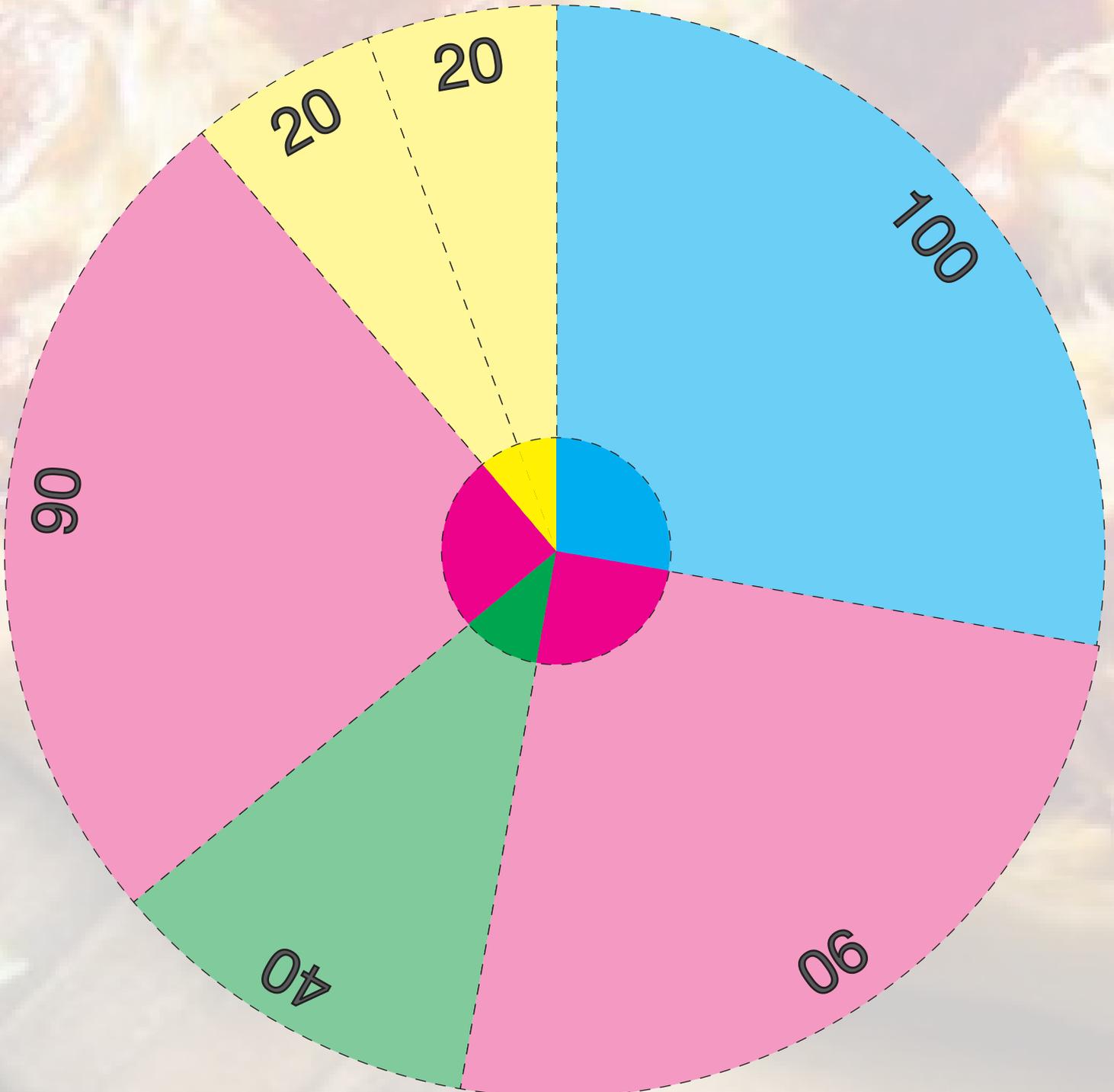
Un peu de combinatoire

Déterminer la meilleure stratégie est un problème très compliqué ! Pour trouver le meilleur premier coup, il faut que je détermine celui qui me permettra de gagner le plus, même si mon adversaire répond par le meilleur coup possible ; mais pour déterminer quel est le meilleur coup par lequel mon adversaire peut répondre, il me faut tester

le meilleur coup que je peux lui rétorquer. Et pour trouver ce meilleur coup... Bref, il me faut tester toutes les parties possibles !

Il y en a beaucoup ! Ainsi, avec une pizza ayant 6 parts de valeurs toutes différentes, le premier joueur a 6 possibilités pour son premier choix, puis, pendant chacun des 4 coups suivants, chaque joueur a 2 possibilités ; enfin, pour le dernier coup, le joueur n'a qu'une seule possibilité. En tout, il y a donc 6 fois 2^4 possibilités, soit 96 parties possibles. Et pour une pizza ayant initialement 10 parts, on a 2560 parties possibles ! Lorsque la pizza a 100 parts, le nombre de parties possibles a une trentaine de chiffres... De quoi donner le vertige !

Trouver la meilleure stratégie possible est donc un problème très compliqué. Peut-on trouver une méthode simple permettant de manger toujours plus que son



Découpez selon les pointillés les parts de pizza et le rond central. Le rond central permet au début

adversaire, même si celui-ci joue très bien ?

La méthode du glouton

Une méthode assez naturelle pour manger le plus de pizza possible consiste à choisir, à chaque étape, la plus grande part possible. On dit alors qu'on applique un algorithme glouton.

En fait, cette méthode ne marche pas très bien. Par exemple, sur la pizza numéro 1, on peut voir que, si le premier joueur applique cet algorithme, il mangera moins de pizza que son adversaire !

Le cas des pizzas paires

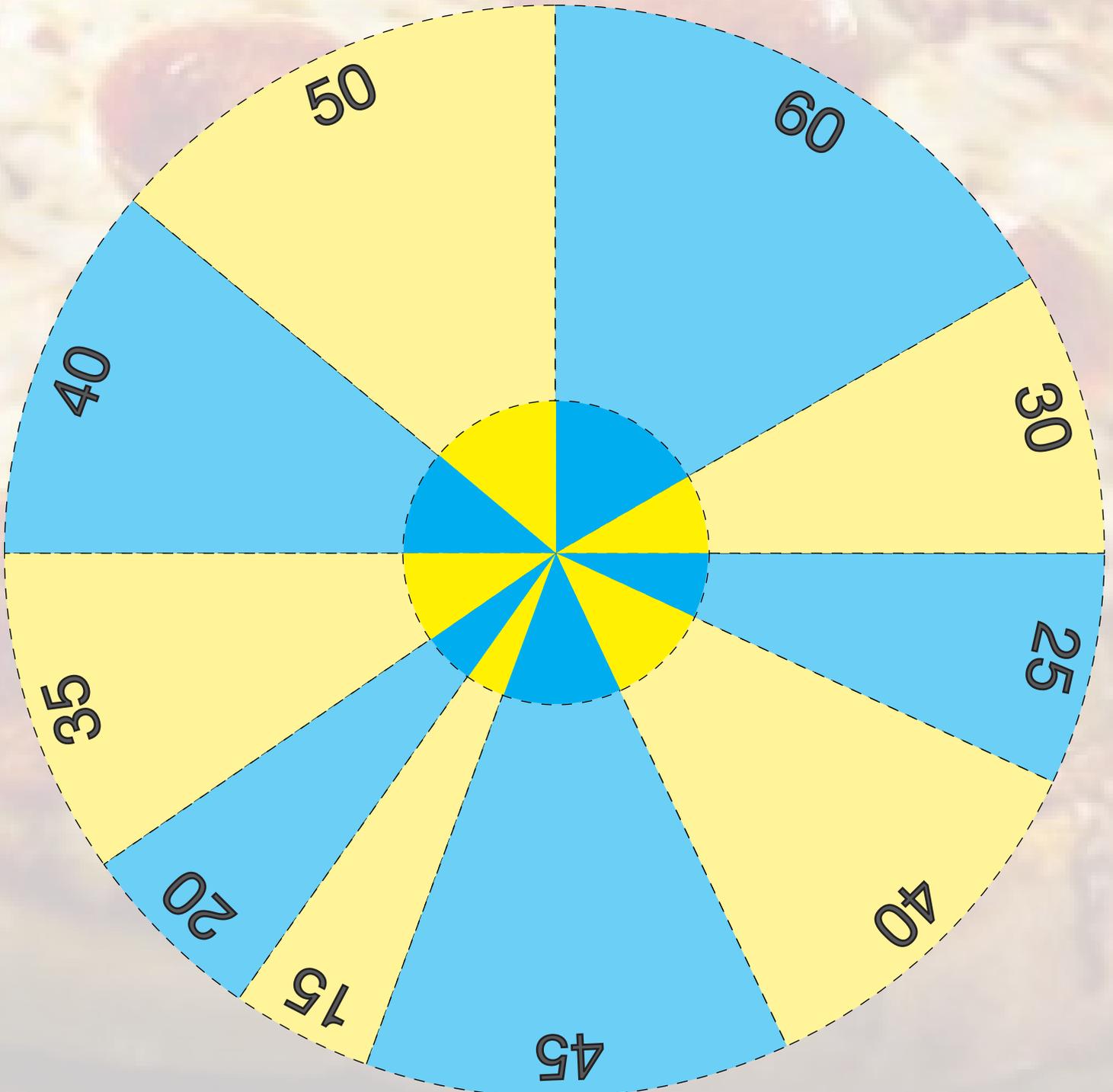
Lorsque le nombre de parts de pizza est pair, on peut séparer les parts en deux groupes (par exemple, des parts jaunes et bleues), de sorte que deux parts adjacentes ne soient jamais de la même couleur. (voir la pizza numéro 2) Remarquons que le premier joueur peut toujours se

débrouiller pour manger toutes les parts d'une couleur donnée. Par exemple, si il choisit une première part bleue, le second joueur doit choisir une part jaune. Le premier joueur doit alors choisir entre une part bleue et une jaune ; s'il choisit la bleue, le second devra encore choisir entre deux parts jaunes...

Une stratégie pour le premier joueur est alors la suivante : il peut calculer quelle couleur a la plus grande valeur, et manger toutes les parts de cette couleur. Ainsi, il est certain de marquer au moins autant de points que son adversaire.

Remarque : ça n'est pas forcément la méthode la plus efficace. Mais au moins, le calcul est très rapide à faire !

Morale : En regardant les symétries du problème, on peut trouver des méthodes très simples et efficaces !



de chaque partie de positionner dans le bon ordre les parts de pizza en faisant correspondre les couleurs.

Le cas des pizzas impaires

Dans le cas d'une pizza où toutes les parts sont égales, si le nombre de parts est pair, les deux joueurs auront le même score. Mais si le nombre de parts est impair, le premier joueur mangera strictement plus.

On a donc l'impression que, sur une pizza ayant un nombre impair de parts, le premier joueur gagnera toujours ! Et pourtant...

Il existe des pizzas ayant un nombre impair de parts, pour lesquelles si le second joueur joue bien, il gagnera toujours !

C'est le cas de la pizza numéro 3. L'idée, c'est que dans cette pizza, il y a quelques « grosses » parts qui sont séparées par de très petites parts. Les petites parts peuvent servir à « sauter un tour ». En sautant des tours de façon astucieuse, le second joueur peut se débrouiller

pour manger plus de grandes parts que le premier joueur, et ainsi gagner la partie !

Remarquons que, si les deux joueurs jouent bien, le second gagne toujours, mais pas de beaucoup ! On peut se demander si il existe des pizzas plus compliquées, pour lesquelles le premier joueur perd toujours, même si il joue très bien.

En fait, la réponse est non. Des mathématiciens ont montré que, quel que soit la pizza, si le premier joueur joue bien, il peut toujours manger au moins $\frac{4}{9}$ de la pizza.

La preuve, qui fait une dizaine de pages, est trop compliquée pour être racontée ici : elle peut être trouvée dans l'article <https://arxiv.org/abs/0812.2870>. Ça n'est pas très courant qu'un article de maths commence par une image de pizza !

