Estimation de π à l'aide des Aiguilles de Buffon

Gaëlle CHAGNY*et Thierry DE LA RUE†

Résumé

Cet article présente la réalisation de l'expérience aléatoire dite des *Aiguilles de Buffon* permettant d'estimer le nombre π, en lançant un grand nombre d'aiguilles sur un parquet à lattes.

Cadre : Activité présentée sur un stand lors de la fête de la science.
Niveau : Tout public, dès le primaire.

Matériel

Des cure-dents (tous de taille identique).
Une grande planche en bois (représentant le parquet de l'expérience), sur laquelle sont tracées des droites parallèles symbolisant les rainures entre les lattes de parquet. Pour simplifier le calcul (voir Section *Participation du public*), nous avons choisi un écartement égal à deux fois la longueur d'un cure-dent entre deux rainures, et pour éviter les biais, une planche dont les dimensions permettent de tracer un nombre entier de lattes de parquet : sa largeur est un multiple de la largeur des lattes de parquet, donc du double de la taille d'un cure-dent.
Un stylo et des feuilles de papier, et une calculatrice.

FIGURE 1 – Réalisation de l'expérience de Buffon à la fête de la science

*LMRS, UMR CNRS 6085, Université de Rouen Normandie
†LMRS, UMR CNRS 6085, Université de Rouen Normandie

Déroulement

Présentation

Dans un premier temps, nous expliquons aux personnes visitant le stand l'expérience réalisée.

Il s'agit de tester la première expérience aléatoire permettant de proposer une approximation du nombre π. Ce problème est dû à Georges-Louis Leclerc (1707-1788), comte de Buffon, connu pour son œuvre naturaliste (en particulier une *Histoire naturelle* en 44 volumes), mais aussi mathématicien et philosophe. Il figure dans son *Essai d'arithmétique* , publié en 1733, au chapitre concernant le « mémoire sur le jeu du franc carreau » . Ce jeu consistait à parier si une pièce de monnaie lancée sur un carrelage allait tomber en plein dans un carreau ou toucher l'un des joints séparant les carreaux. Dans son essai, présenté pour entrer à l'Académie royale des sciences de Paris, Buffon calcule la probabilité de gagner à ce jeu, puis l'étend au cas du lancer d'une aiguille. Le résultat qu'il obtient est le suivant :

On lance une aiguille de longueur a sur un parquet dont les lames ont pour largeur ℓ. Alors la probabilité que l'aiguille tombe à cheval sur deux lames est

$$p = \frac{2a}{\pi \ell}.$$

Participation du public

Nous expliquons au public que nous avons représenté des lames de parquet sur la planche en bois installée sur le stand (voir la photo 1). Les aiguilles à lancer sont ici des cure-dents qui ont pour longueur la moitié de la largeur des lames : $a = \ell/2$. On a ainsi $p = 1/\pi$. Si on lance un grand nombre d'aiguilles, on peut estimer «raisonnablement» la probabilité p par la proportion d'aiguilles lancées ayant touché une rainure. Ici, «raisonnablement» signifie qu'avec probabilité 1, cette proportion se rapproche de $1/\pi$ quand le nombre d'aiguilles lancées devient très grand ; c'est une conséquence de la loi des grands nombres.

En lançant un grand nombre d'aiguilles, et en divisant le nombre d'aiguilles lancées par le nombre d'aiguilles ayant touché une rainure, on obtient donc une approximation de π (un estimateur consistant).

Nous proposons aux volontaires de faire tomber 20 aiguilles (ou plus, ou moins...) sur notre parquet, et de compter le nombre d'aiguilles ayant touché une rainure. Chaque volontaire peut ensuite mettre à jour l'estimation obtenue depuis le début de l'expérience, en faisant le calcul avec la calculatrice disponible. Au stade présenté sur la photo 1, l'estimation de π est :

$$\frac{799}{254} \simeq 3,1456.$$

Aux personnes ayant quelques notions mathématiques, on peut faire remarquer que l'estimation obtenue donne un nombre rationnel : c'est la fraction de deux nombres entiers, alors que π est irrationnel. On peut également expliquer que la vitesse à laquelle on se rapproche de π est relativement lente (de l'ordre de 1 sur la racine carrée du nombre d'aiguilles lancées). Ainsi pour diviser par 10 l'erreur d'approximation obtenue, il faut lancer 100 fois plus d'aiguilles (c'est cette fois une conséquence du théorème central limite). La précision remarquable de l'estimation obtenue sur la photo 1 est la conséquence d'un heureux hasard : avec un nombre aussi réduit d'aiguilles lancées on ne peut pas en général s'attendre à obtenir π au centième près !

Des explications, détails et références figurent ici : https://sorciersdesalem.math.cnrs.fr/Pi_par_hasard/buffon_plus.html, en particulier une idée générale d'une démonstration du résultat de Buffon, due à Joseph-Émile Barbier. Par ailleurs, nous avons également codé l'application https://sorciersdesalem.math.cnrs.fr/Pi_par_hasard/buffon.html permettant de simuler l'expérience.