

1. LE NOMBRE D'OR: φ

Il s'agit du nombre

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1.618$$

C'est le premier nombre dont l'irrationalité a été prouvée. On doit ce résultat à Théodore de Cyrène au V^{ème} siècle avant J.C. D'un point de vue géométrique, c'est le rapport entre le grand côté b d'un rectangle et son petit côté a , de telle sorte que s'il on découpe le carré de côté a , il reste un rectangle semblable. Cela se traduit arithmétiquement par le développement en fraction continue

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Le nombre d'or apparaît également comme limite du rapport entre deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci f_n :

$$f_0 = 1, f_1 = 1, f_2 = 2, \dots, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad \varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

2. LE RAPPORT DE LA CIRCONFÉRENCE AU DIAMÈTRE DU CERCLE: π

Ce rapport de la circonférence au diamètre du cercle est incontestablement le nombre qui a le plus fait couler d'encre. En dehors de sa définition géométrique, on peut le définir par la formule de Leibniz (1674).

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = 3.1415926 \dots$$

Son irrationalité résulte du développement en fraction continue infini de $\tan x$ dû à Lambert en 1767.

$$\tan x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \ddots}}}}$$

En prenant $x = \frac{\pi}{4}$, et en raisonnant par l'absurde, on trouve que π^2 et donc π est irrationnel. La transcendance de π est due à Ferdinand von Lindemann en 1882.

3. LE NOMBRE COMPLEXE $i = \sqrt{-1}$

Le nombre i dont le carré vaut -1 permet de construire tous les nombres complexes. Son invention et son écriture sous la forme $\sqrt{-1}$ sont dues à Raphaël Bombelli en 1572. Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont réels. Avec ces nombres, toute équation de degré au moins 1 admet au moins une solution. Si on représente le nombre complexe z par le point du plan réel de coordonnées (a, b) , alors la multiplication par i correspond à la rotation d'angle $\pi/2$ autour de l'origine. Euler a établi la célèbre formule

$$e^{i\pi} = -1$$

C'est en appliquant cette formule, que Lindemann prouve la transcendance de π . Par ailleurs l'égalité

$$e^\pi = (e^{i\pi})^{-i} = (-1)^{-i}$$

conduit à la transcendance de e^π d'après un théorème d'Alexandre Gelfond de 1929.

4. LA BASE DU LOGARITHME NÉPÉRIEN: e

Ce nombre est la somme de la série suivante.

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = 2.7182818284\dots$$

Si on définit la fonction logarithme népérien \ln comme la primitive de $\frac{1}{x}$ qui s'annule en 1, alors e est caractérisé par la relation $\ln e = 1$. Autrement dit,

e est la base du logarithme népérien. Le développement en fraction continue infini dû à Leonhard Euler en 1737

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \ddots}}}}}}}}}}$$

prouve l'irrationalité de e . La transcendance de e est due à Charles Hermite en 1873.

5. LA CONSTANTE ζ_3

Ce nombre est défini par une somme infinie.

$$\zeta_3 = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots = 1.2020569\dots$$

C'est la valeur en $s = 3$ de la fonction de variable complexe ζ de Riemann qui, pour les nombres réels $s > 1$ était connue d'Euler.

$$\zeta_s = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

En 1737, Euler avait calculé les valeurs de ζ pour $s = 2n$.

$$\zeta_2 = \frac{\pi^2}{6}, \zeta_4 = \frac{\pi^4}{90}, \zeta_6 = \frac{\pi^6}{945}, \dots$$

En revanche, il avait conjecturé que ζ_3 s'exprimerait comme le produit de π^3 par un nombre dépendant de $\ln 2$. La question est toujours en suspens. On sait seulement depuis 1977 (R. Apéry) que ζ_3 est irrationnel.

6. LA CONSTANTE D'EULER γ

Ce nombre est défini comme limite d'une suite.

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \ln n = 0.577215664\dots$$

La fonction ζ de Riemann, qui est définie pour tout nombre complexe s différent de 1, admet un pôle en $s = 1$, et son développement au voisinage de 1 s'écrit:

$$\zeta_s = \frac{1}{s-1} + \gamma - \gamma_1(s-1) + \frac{1}{2}\gamma_2(s-1)^2 + \cdots$$

avec $\gamma_1 = 0.0728\dots$, $\gamma_2 = 0.00969\dots$. Voici une autre égalité qui relie γ et ζ .

$$\gamma = \frac{1}{2}\zeta_2 - \frac{1}{3}\zeta_3 + \frac{1}{4}\zeta_4 + \cdots$$

La nature arithmétique de γ est inconnue. On ignore si elle est rationnelle.