

# Le retour des pizzas!

Maxime Ingremeau et Marc Monticelli

## 1. Introduction

À quoi reconnaît-on un bon article de la Gazette? Tous les lecteurs et les lectrices prennent du plaisir à sa lecture, de la première à la dernière page. À quoi reconnaît-on un très bon article de la Gazette? Il est possible de transmettre son plaisir au plus grand nombre, en en faisant un atelier de diffusion! C'est le cas de l'article de Marie Albenque, intitulé *Comment manger un maximum de pizza*, publié dans la Gazette d'avril 2016. Cet atelier, utilisant quelques pizzas en plastique ou en bois<sup>1</sup> fabriquées au MaMath, le fablab du laboratoire J.A. Dieudonné, fait le bonheur des petits et des grands à chaque édition de la Fête de la science, et a aussi été adapté par certains professeurs des écoles dans leurs classes. La force de cet atelier est de s'adapter à tous les niveaux : les plus petits peuvent y (re)voir les notions d'angles, d'additions et de parité, tandis que les plus grands y découvrent des notions de théorie des jeux et d'algorithmique.

## 2. Règles du jeu

Une pizza a été découpée n'importe comment, et toutes les parts ne sont pas égales. La valeur de chaque part est écrite dessus (et, en pratique, correspond à l'angle de la part). Vous et votre ami avez décidé de vous partager la pizza de la façon suivante :

- Choisissez d'abord n'importe quelle part ;
- Ensuite, votre ami et vous choisirez une part à tour de rôle, en respectant la règle suivante : *il faut choisir une part adjacente à une part déjà choisie.*

Ainsi, à chaque tour sauf le premier et le dernier, il y a deux coups possibles possibles, de chaque côté des parts manquantes.

Le but est de manger le plus de pizza possible!

Idéalement, l'atelier se déroule avec un encadrant, qui explique les règles du jeu et propose les activités de la section 4. La section 3 ci-dessous

sert alors à enrichir le discours de l'encadrant. Alternativement, l'atelier peut se dérouler en autonomie, en imprimant une fiche explicative contenant les règles du jeu, les questions ci-dessous, puis la section 3.

- Est-ce une bonne idée de toujours chercher à manger la plus grosse part possible ?
- Sur une pizza dont toutes les parts sont égales, le premier joueur gagne-t-il toujours ?
- Sur une pizza ayant un nombre pair de parts, le premier joueur est-il assuré de manger au moins la moitié de la pizza ? Si oui, comment ?
- Sur une pizza ayant un nombre impair de parts, le premier joueur est-il assuré de manger au moins la moitié de la pizza ? Si oui, comment ?

## 3. Explications

### La théorie des jeux

Cette branche des mathématiques vise à modéliser les interactions entre deux joueurs (ou plus), chacun cherchant à optimiser son gain. On y retrouve les jeux traditionnels, allant du plus simple (le morpion) au plus compliqué (les échecs ou le go). Mais les jeux les plus étudiés par les mathématiciens sont ceux qui permettent de modéliser des situations économiques ou sociologiques, ou encore ceux qui ont des liens avec des problèmes d'informatique théorique.

### Un peu de combinatoire

Déterminer la meilleure stratégie est un problème très compliqué! Pour trouver le meilleur premier coup, il faut que je détermine celui qui me permettra de gagner le plus, même si mon adversaire répond par le meilleur coup possible; mais pour déterminer quel est le meilleur coup par lequel mon adversaire peut répondre, il me faut tester le meilleur coup que je peux lui rétorquer. Et pour trouver ce meilleur coup... Bref, il me faut tester toutes

1. Il est aussi possible de faire les pizzas en carton ou en papier. Une version pouvant être imprimée et découpée peut être téléchargée sur le site internet du mathemarium.

### Mathemarium : Expérimenter les mathématiques

En 2016 le laboratoire J.A. Dieudonné a créé le MaMath, un Makerspace (fablab) pour des travaux de recherche (interface Math-Bio, mécaflu) et pour la création d'ateliers et d'objets pour la diffusion scientifique. Situé au sein même du laboratoire, il occupe 50m<sup>2</sup> et fournit support technique et de nombreux outils habituels dans les fablabs (imprimantes 3D FDM et SLA, découpe laser, CNC, thermoformeuse, électronique, perceuses, ...). Il accueille les collègues mais aussi les projets d'une formation doctorale à la culture scientifique en mathématiques.

En 2019, l'activité de culture scientifique du LJAD a abouti à la création du Mathemarium avec pour crédo : « dédramatiser l'accès aux mathématiques par la manipulation et l'expérimentation ». A ce jour ce sont plus de 50 objets et dispositifs ainsi qu'une quinzaine d'ateliers (pouvant regrouper plusieurs dispositifs) avec leur fiches pédagogiques qui ont été créés par les membres du laboratoire, doctorant.es; post-docs et enseignants.es de l'éducation nationale partenaires. Pour plus d'info : [www.mathemarium.fr](http://www.mathemarium.fr)

les parties possibles.

Il y en a beaucoup! Ainsi, sur une pizza ayant 6 parts de valeurs toutes différentes, le premier joueur a 6 possibilités pour son premier choix, puis, pendant chacun des 4 coups suivants, chaque joueur a 2 possibilités; enfin, pour le dernier coup, le joueur n'a qu'une seule possibilité. En tout, il y a donc 6 fois 24 possibilités, soit 96 parties possibles. Pour une pizza coupée en 10 parts, on a 2560 parties possibles! Si la pizza a 100 parts, le nombre de parties possibles a une trentaine de chiffres... De quoi donner le vertige!

Trouver la meilleure stratégie est donc un problème très compliqué. Peut-on trouver une méthode simple permettant de manger toujours plus que son adversaire, même si celui-ci joue très bien?

#### La méthode du glouton

Une méthode assez naturelle consiste à choisir, à chaque étape, la plus grande part possible. On dit alors qu'on applique un algorithme glouton. En fait, cette méthode ne marche pas très bien. Par exemple, sur la pizza numéro 1, on peut voir que, si le premier joueur applique cet algorithme, il mangera moins de pizza que son adversaire!

#### Le cas des pizzas paires

Lorsque le nombre de parts est pair, on peut les séparer en deux couleurs, de sorte que deux parts adjacentes ne soient jamais de la même couleur. (Voir la pizza numéro 2 sur la Figure 1)

Remarquons que le premier joueur peut toujours se débrouiller pour manger toutes les parts d'une couleur donnée. Par exemple, si il choisit une pre-

mière part bleue, le second joueur doit choisir une part jaune. Le premier joueur doit alors choisir entre une part bleue et une jaune; s'il choisit la bleue, le second devra encore choisir entre deux parts jaunes, etc.

Une stratégie pour le premier joueur est alors la suivante : il calcule quelle couleur a la plus grande valeur, et mange toutes les parts de cette couleur. Ainsi, il est certain de marquer au moins autant de points que son adversaire. Ça n'est pas forcément la méthode la plus efficace. mais le calcul est rapide à faire!

Morale : En regardant les symétries du problème, on peut trouver des méthodes simples et efficaces!

#### Le cas des pizzas impaires

Considérons tout d'abord le cas d'une pizza où toutes les parts sont égales. Si le nombre de parts est pair, les deux joueurs auront le même score., mais si le nombre est impair, le premier joueur mangera strictement plus.

On a donc l'impression que, sur une pizza ayant un nombre impair de parts, le premier joueur gagnera toujours! Et pourtant...

Il existe des pizzas ayant un nombre impair où, si le second joueur joue bien, il gagne toujours! C'est le cas de la pizza numéro 3. Dans cette pizza, il y a quelques « grosses » parts qui sont séparées par de très petites parts. Les petites parts peuvent servir à « sauter un tour ». En sautant des tours de façon astucieuse, le second joueur peut se débrouiller pour manger plusieurs grandes parts et pour gagner la partie!

Remarquons que, si les deux joueurs jouent bien, le second gagne toujours, mais pas de beaucoup!

On peut se demander s'il existe des pizzas plus compliquées pour lesquels le premier joueur perd toujours de beaucoup, même s'il joue très bien.

La réponse est non. Des mathématiciens ont montré que, quelle que soit la pizza, le premier joueur peut toujours manger au moins  $4/9$  de la pizza.

La preuve, qui fait une dizaine de pages peut être trouvée dans l'article <https://arxiv.org/abs/0812.2870>. Ça n'est pas très courant qu'un article de maths commence par une image de pizza!

## 4. Déroulement de l'activité

L'activité dure environ 20 minutes, mais peut être raccourcie.

1. Laisser les participants jouer avec quelques pizzas simples pour découvrir les règles.
2. Leur faire remarquer que, pour compter le score, on a deux méthodes : soit on somme les nombres écrits sur les parts, soit on place les parts récoltées côte à côte : si on obtient plus de la moitié, on a gagné!
3. Demander aux participants si, dans les parties qu'ils ont jouées, le premier joueur gagnait toujours. Est-ce toujours le cas, ou a-t-il eu de la chance? Est-ce que manger systématiquement la plus grosse part, est toujours une bonne idée?
4. En utilisant la pizza 1, faire comprendre aux participants que manger toujours la plus grosse part n'est pas forcément une bonne idée.
5. Montrer aux participants la pizza 2 non colorée. Combien a-t-elle de parts? Ont-ils une idée d'une méthode qui permettrait au premier joueur de gagner? (En général, non. Ils vont dire « je sais comment faire », mais vont se contenter de jouer, sans être certains à l'avance s'ils vont gagner.)
6. Leur montrer la pizza 2 colorée. Cela leur donne-t-il une idée? Quelle couleur a le plus de valeur? Le premier joueur peut-il se débrouiller pour manger toutes les parts d'une couleur?

7. Les participants trouvent souvent seuls la méthode à employer. Leur faire essayer, pour s'assurer qu'ils ont bien compris. Leur expliquer qu'avec cette approche, où on est certains à l'avance de combien on va gagner! Par contre, rien ne dit que c'est la méthode la plus efficace... Comprendre que cette méthode fonctionne pour n'importe quelle pizza ayant un nombre pair de parts. Remarquer que les mathématiques sont incroyables : on a inventé une méthode qui fonctionne même pour des pizzas qu'on n'a encore jamais vues ou imaginées!
8. D'après eux, sur une pizza ayant un nombre impair de parts, le premier joueur gagnera-t-il toujours? Remarquer qu'il aura toujours une part de plus que l'adversaire. Comprendre que la méthode précédente ne marche pas : impossible de colorier les parts de 2 couleurs, et de manger toutes les parts d'une couleur.
9. Faire jouer les participants avec la pizza 3, puis leur montrer que le deuxième joueur peut toujours l'emporter.
10. Optionnel : Expliquer aux participants que des mathématiciens ont montré que, sur n'importe quelle pizza, le premier joueur a toujours une stratégie pour manger  $4/9$  de la pizza.

FIGURE 1 – Les pizzas 1, 2 et 3 utilisées dans l'atelier

