Jeu de la onzième carte

Vincent Beck, Philippe Grillot *

October 15, 2023

Abstract

Ce tour, très populaire suscite à chaque présentation l'intérêt du public. De prime à bord simple dans sa reproduction il éveille un réel intérêt dans sa modélisation. Plusieurs articles lui sont consacrés, notamment celui de Dibyajyoti Deb [1], mais aussi des vidéos comme celle réalisée à l'occasion des journées de formation de la Maison pour la Science Centre Val de Loire (https://www.youtube.com/watch?v=wbuxku6ptgM).

Matériel

un jeu de 21 cartes

Déroulé du tour

Le magicien propose à un membre du public de choisir une carte dans un jeu de 21 cartes. Le magicien demande à une autre personne de choisir un nombre parmi les nombres 1; 4; 7; 8; 11; 14; 15; 18 et 21. Le magicien bat les cartes puis il dépose les 21 cartes en faisant trois tas de sept cartes de sorte qu'elles soient toutes visibles et de la façon suivante : les cartes sont déposées une par une, la première sur le premier tas, la deuxième sur le deuxième tas, la troisième sur le troisième tas, la quatrième sur le premier tas et ainsi de suite. Le mathémagicien demande alors de désigner le tas dans lequel se trouve sa carte. Le magicien ramasse les cartes, tas complet sur tas complet, et répète deux fois ce partage en trois tas.
À l'issue des trois ramassages, le magicien annonce que la carte choisie se trouve à la position égale au numéro choisi.

Explications

Soit n l'entier égal au nombre de tours de ramassage, $n \in \{1, 2, 3\}$ et soit u_n le rang dans le jeu complet de la carte choisie par le spectateur à l'issue du $n^{\text{ème}}$ ramassage. Le terme u_0 désigne le rang de la carte choisie dans le jeu initial, u_1 désigne le rang de la carte dans le jeu après le premier ramassage,..., en notant ces rangs de 0 à 20. La position de la carte est alors son rang plus 1. Ainsi :

$$u_n \in \{0, 1, ..., 20\}.$$

Remarquons qu'une relation peut être établie entre le rang u de la carte dans le jeu initial et son rang intermédiaire dans l'un des trois tas que l'on notera q, après une distribution. Cette

*Institut Denis Poisson, Université d'Orléans

relation est : $u = 3q + r$ avec $r = 0, 1, 2$; les entiers q et r sont le quotient et le reste de la division euclidienne de u par 3. En particulier, q est la partie entière du nombre réel $\frac{u}{3}$, que l'on note $E(\frac{u}{3})$. Le tableau ci-dessous donne les valeurs de q et r selon les différentes valeurs prises par P.

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
q	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6

On a alors la relation suivante :

$$u_n = 7a_{n-1} + E\left(\frac{u_{n-1}}{3}\right)$$

pour tout $n \in \{1; 2; 3\}$ où a_n désigne le nombre de tas déposés au dessus du tas contenant la carte choisie.
Intégrant le fait que $0 \leq u_0 \leq 20$, des encadrements successifs des termes u_1 et u_2 conduisent à l'encadrement suivant du terme $u_3 = 7a_2 + E\left(\frac{7a_1 + E\left(\frac{7a_0 + E(\frac{u_0}{3})}{3}\right)}{3}\right)$:

$$7a_2 + E\left(\frac{7a_1 + E(\frac{7a_0}{3})}{3}\right) \leq u_3 \leq 7a_2 + E\left(\frac{7a_1 + 2 + E(\frac{7a_0}{3})}{3}\right).$$

Posons :

$$I = E\left(\frac{7a_1 + E(\frac{7a_0}{3})}{3}\right) \text{ et } J = E\left(\frac{7a_1 + 2 + E(\frac{7a_0}{3})}{3}\right).$$

Les valeurs de a_0 et a_1 pour lesquelles $I = J$ permettront de connaître les valeurs de u_3 indépendamment de u_0.
Le tableau ci-dessous liste les configurations possibles des deux premiers ramassages et les valeurs de I et J associées.

a_0	a_1	I	J
0	0	0	0
0	1	2	3
0	2	4	5
1	0	0	1
1	1	3	3
1	2	5	6
2	0	1	2
2	1	3	4
2	2	6	6

En intégrant les trois valeurs possibles de a_2 à celles des couples (a_0, a_1) qui assurent l'égalité entre I et J, on en déduit les rangs possibles de la carte choisie à l'issue des trois ramassages, qui sont résumés dans le tableau ci-dessous :

a_0	a_1	a_2	rang de la carte dans le paquet à l'issue des trois ramassages
0	0	0	0
1	1	0	3
2	2	0	6
0	0	1	7
1	1	1	10
2	2	1	13
0	0	2	14
1	1	2	17
2	2	2	20

Remarquons que si l'on remplace le jeu de 21 cartes par un jeu de 27 cartes, alors toutes les positions sont accessibles par le ramassage successif de trois tas de 9 cartes; en effet le rang de la carte choisie à l'issue du troisième ramassage vaut : $u_3 = a_0 + 3a_1 + 3^2 a_2$ avec a_0, a_1 et a_2 dans $\{0; 1; 2\}$. Le tour devient alors un peu plus spectaculaire puisque le mathémagicien demande de choisir une carte puis un nombre entre 1 et 27 au public et affirme trouver la carte dans le jeu à la position demandée. Il lui suffit alors de faire la décomposition de tête du nombre moins un en base 3, puis faire ses trois ramassages avec les a_i correspondants à la décomposition.

Référence :

[1]: D. Deb, The 21 Card Trick and its Generalization, arxiv:1809.04072.