

Activité du chat et de la souris

Le contexte : un chat poursuit une souris dans un appartement.

Le matériel : il faut utiliser deux jetons, par exemple, un chat noir et une souris blanche (ou verte, parce qu'une souris verte ...).

En option, on peut prévoir des jetons colorés qui peuvent servir au moment de parler de la bicolorabilité.

La règle : le chat doit se placer en premier. Puis la souris se place. Ensuite, chaque animal, à tour de rôle, doit réaliser un déplacement. Le chat gagne s'il attrape la souris. On ne fixe pas de nombre de coups pour terminer l'activité : si la souris n'est pas attrapée au bout d'un certain nombre de coups (30, 35647, ...), on peut décider que la souris a gagné.

Résolution de l'activité

Ce problème se traite dans le domaine de la théorie des graphes. On cherche à colorier le graphe de sorte à ce que, lorsqu'un trait (une arête) relie deux ronds (deux sommets), les deux couleurs des extrémités soient différentes. Il faut obligatoirement deux couleurs au minimum. Si l'on peut y parvenir avec exactement deux couleurs, on parle de graphe bicoloriable. C'est le cas du graphe pour le premier appartement, mais pas pour le deuxième appartement.

Si un graphe est bicoloriable, et si chaque sommet possède au moins deux voisins, alors la souris gagne toujours. En effet, comme elle se place après le chat, elle dispose d'une stratégie gagnante : elle regarde la couleur de la case choisie par le chat, et elle se place sur une case de la même couleur. Comme le chat doit alors se déplacer, le chat est obligé de se rendre sur une case qui est d'une autre couleur. Autrement dit, après le déplacement du chat, les deux animaux sont sur deux cases de couleurs différentes, donc en particulier ils ne sont pas sur la même case, ce qui signifie que le chat n'a pas attrapé la souris. Si la case sur laquelle se trouve la souris ne dispose que d'une seule case, il serait possible que la souris soit forcée d'aller sur la case du chat. Mais comme on a supposé que la souris dispose toujours d'au moins deux cases (c'est bien le cas du premier appartement), il y a toujours une case sur laquelle elle peut aller sans se faire attraper par le chat.

Le deuxième appartement n'est pas bicoloriable : le chat a la possibilité d'utiliser une troisième couleur pour "perdre un temps" (la souris dispose également de cette possibilité, mais cela ne la sauve pas !). Remarque : on a mentionné précédemment que sur un graphe bicoloriable dont chaque sommet possède au moins deux voisins, la souris gagne. Cette condition est suffisante, mais pas nécessaire. Par exemple, la souris gagne aussi sur un graphe circulaire constitué de 5 sommets, qui n'est pas bicoloriable.

On pourra faire remarquer que la bonne compréhension de l'activité ne repose pas (uniquement) sur la notion de distance : si le chat et la souris se placent sur deux cases les plus éloignées dans le premier appartement, la souris peut se faire attraper. La souris doit se placer "moins loin" pour pouvoir échapper au chat. De même, dans le deuxième appartement, si le chat veut pouvoir attraper la souris, il doit à un moment s'éloigner (ce qui peut sembler contre-intuitif).

Considérations pédagogiques

- on peut demander à ce que la souris se pose en premier : dans ce cas, le chat gagne,
- on peut autoriser la souris à passer son tour : dans ce cas, la souris gagne,
- on peut utiliser d'autres graphes (appartements), éventuellement avec des cases et/ou des traits réservés à l'un des deux animaux (par exemple, un trou pour la souris, qui est sauvée si elle peut y parvenir).