Tangram en carré

Shaula Fiorelli et Elise Raphael *

October 12, 2023

Durée: 1h
Niveau: dès 10 ans

Abstract

Cette activité consiste à trouver tous les carrés que l'on peut construire avec les pièces du tangram (9 carrés) et selon l'âge, démontrer ou se convaincre qu'il n'y en a pas plus. Elle utilise l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ et la reconnaissance des configurations identiques à isométrie près. Elle fait partie du catalogue du Mathscope, et est donc proposée sous un format d'une heure pour un groupe de 10 à 25 personnes (par tables de 3 à 5, ce qui induit souvent une certaine émulation pour trouver le plus de carrés possibles). Il est bien sûr possible de l'adapter.

Matériel

Un jeu de tangram par élève, éventuellement plusieurs jeux de tangram magnétiques, papier et crayon

Phase 1

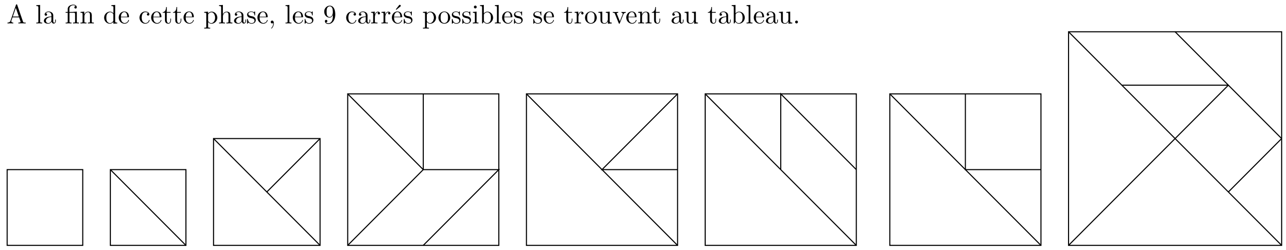
Objectif : recenser toutes les manières d'obtenir un carré avec les pièces du Tangram.
Après une brève phase d'observation des pièces (rappeler éventuellement le nom des différentes formes géométriques), le dialogue avec les élèves commence par les questions suivantes : *Est-ce qu'il est possible de faire un carré avec deux pièces ? Et avec une ?* Les réponses sont immédiates et permettent de dessiner les trois premiers carrés au tableau, que l'on organise de manière à pouvoir classer les carrés par nombre de pièces.
On demande alors aux élèves de construire tous les carrés possibles avec les pièces du Tangram. S'ensuit un temps de recherche pendant lequel les encadrant-e-s passent auprès des différents groupes et encouragent les participant-e-s à dessiner les différentes possibilités obtenues, en les classant par nombre de pièces utilisées. Selon l'âge des enfants, il est parfois utile de structurer plus la phase de recherche, en fixant un nombre de pièces ou des pièces imposées avant de passer au suivant.
A intervalles réguliers, lorsque presque tout-e-s les participant-e-s sont parvenu-e-s à obtenir une des configurations, on envoie des élèves au tableau pour les montrer avec les Tangrams magnétiques et les dessiner. Il est parfois utile d'orienter la recherche de certains groupes vers les configurations

*Mathscope, Université de Genève

manquantes, pour finalement avoir toutes les possibilités au tableau.

Il arrivera que certaines configurations identiques soient proposées plusieurs fois. Interroger le reste du groupe sur la similitude entre ces configurations permet généralement d'établir qu'elles sont identiques à isométrie près, sans nécessairement prononcer ce mot.

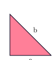
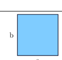
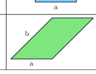
A la fin de cette phase, les 9 carrés possibles se trouvent au tableau.



Phase 2

Objectif : Etablir que toutes les configurations possibles ont été trouvées, et particulièrement qu'il est impossible de construire un carré en utilisant 6 pièces du Tangram.

On considère que le petit triangle représente l'unité de base (il a une aire de un). On établit alors l'aire des autres formes du Tangram ainsi que leurs dimensions. En particulier, le carré avec les 7 pièces a une aire de 16.

Pièces		a	b	Aire
Petit triangle		$\sqrt{2}$	2	1
Triangle intermédiaire		2	$2\sqrt{2}$	2
Grand triangle		$2\sqrt{2}$	4	4
Carré		$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2
parallélogramme		$\sqrt{2}$	2	2

En enlevant une des pièces (i.e avec 6 pièces), l'aire du carré peut être $n = 12$, $n = 14$ ou $n = 15$. Son côté doit donc être égal à $\sqrt{12}, \sqrt{14}$ ou $\sqrt{15}$. Le côté du carré doit être formé par la juxtaposition de pièces du tangram, et sa longueur est égale à la somme des longueurs de ces pièces. Le côté du carré doit donc s'écrire sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec a et b entiers, et l'aire comme $(a + b\sqrt{2})^2 = a^2 + 2\sqrt{2}ab + 2b^2$.
A ce stade, on peut soit faire la preuve formelle (voir ci-dessous), soit utiliser l'argument suivant pour donner l'intuition: le côté du carré doit s'écrire $a + b\sqrt{2}$ avec a et b entiers. Comme $n = 12, 14$ ou 15, cela veut dire que le côté du carré vaut $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ou $\sqrt{14} = \sqrt{2}\sqrt{7}$ ou $\sqrt{15} = \sqrt{3}\sqrt{5}$. Il n'est pas possible de décomposer ces nombres sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec a et b entiers....

Preuve formelle: Comme n n'est pas un carré parfait, dans sa décomposition en facteurs premier il existe au moins un nombre premier p dont la puissance est impaire. Notons $n = mp^{2k+1}$ avec m entier. On a alors

$$mp^{2k+1} = a^2 + 2\sqrt{2}ab + 2b^2$$

Il y a trois cas à étudier:

- a et b sont non nuls. On obtient alors $\sqrt{2} = \frac{mp^{2k+1}-a^2-2b^2}{2ab}$, i.e $\sqrt{2}$ est rationnel.
- $b = 0$ et $a \neq 0$. On obtient alors $mp^{2k+1} = a^2$. Impossible car n n'est pas un carré.
- $a = 0$ et $b \neq 0$. On obtient alors $mp^{2k+1} = 2b^2$. Si 2 divise m, on se retrouve dans le cas précédent: impossible car $\frac{n}{2}$ n'est pas un carré. Sinon, c'est que 2 divise p, et donc $p = 2$, ce qui donne $m = (\frac{b}{2^k})^2$, i.e. m est un carré.

La seule solution possible est donc que $n = v^2 2^{2k+1}$ avec v entier. Or ni 12, ni 14, ni 15 ne possèdent une telle décomposition. Il n'est donc pas possible de construire un carré avec 6 pièces de tangram.

Pour établir que toutes les configurations ont bien été trouvées, on peut admettre (ou prouver, voir ici) que les aires possibles pour des carrés sont 2, 4, 8 et 16, puis recenser les cas pour chaque décomposition: $4 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1$,etc...

Conclusion

Cette activité est adaptable à une vaste tranche d'âge. Il est possible de se restreindre à la phase 1 pour de jeunes enfants par exemple et de se concentrer alors sur les isométries, ou bien d'aller jusqu'à une démonstration exacte utilisant l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Entre ces deux extrêmes, la discussion autour de l'exhaustivité des solutions trouvées permet d'aborder la notion de preuve (d'impossibilité entre autres) et de la place de ce genre de raisonnement en mathématiques.