

ATELIER DÉCOUVERTE AUTOUR DU TRIANGLE DE PASCAL

ÉLISE JANVRESSE, THIERRY DE LA RUE

Niveau : à partir de la 3ème.

Durée : 2h (3h avec les compléments)

Matériel : 3 fiches par élève (à imprimer à l'avance)

Cet atelier a pour but de faire découvrir, et démontrer, certaines propriétés du triangle de Pascal. Dans la 2ème partie, nous faisons le lien avec le triangle de Sierpinski et introduisons la notion de fractale.

1. COMPTONS LES CHEMINS

Nous introduisons les nombres apparaissant dans une case donnée du triangle comme le *nombre de chemins allant de cette case au sommet du triangle*, en allant toujours vers le haut et sans sortir du triangle. Après avoir dénombré avec eux tous les chemins pour les cases des lignes 1 et 2, les élèves continuent pour remplir les nombres des cases sur les lignes 3, 4 et 5. Ils utilisent pour cela la fiche 1 dans laquelle ils peuvent dessiner tous les chemins partant d'une case donnée.

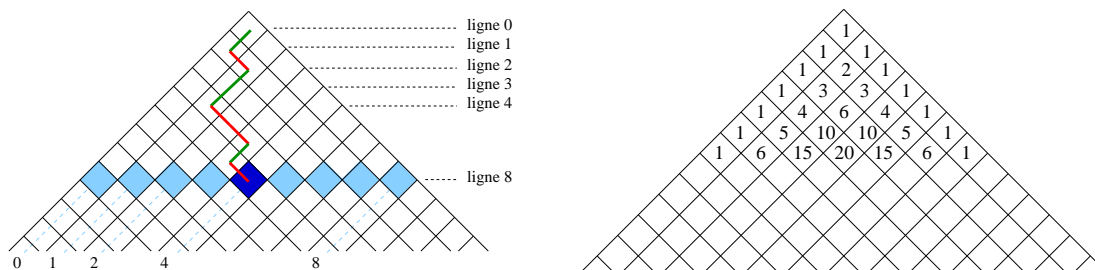
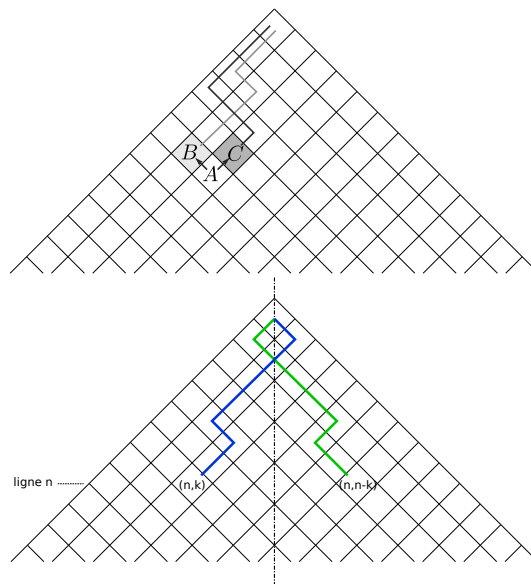


FIGURE 1. Sur le dessin de gauche, on a représenté l'un des chemins allant de la case (8, 4) au sommet. À droite, on donne le résultat des premières lignes

Les élèves font naturellement des conjectures sur des propriétés vérifiées par les nombres dans les cases. Le plus difficile est de les amener à expliciter une démonstration, voire à admettre qu'une démonstration portant sur des nombres puisse consister en des mots.

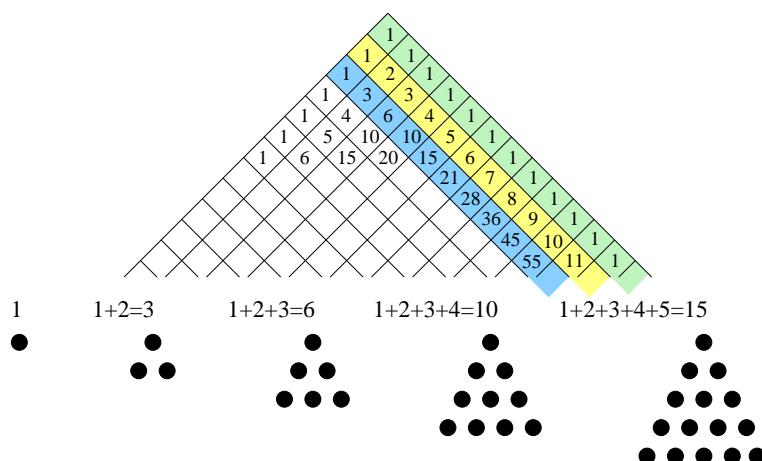
Le contenu de chaque case est la somme des deux nombres du dessus. En effet, chaque chemin partant de la case A passe par l'une ou l'autre des deux cases B ou C juste au-dessus. Le nombre de ces chemins passant par la case B est le nombre écrit dans cette case. Le nombre de ces chemins passant par la case C est le nombre écrit dans cette case. Donc, le nombre total de chemins partant de la case A est la somme des nombres écrits dans les cases B et C .



Le triangle possède une symétrie axiale. À chaque chemin allant de la case (n, k) au sommet correspond un chemin symétrique allant de la case $(n, n - k)$ au sommet. Donc il y a autant de chemins allant de la case (n, k) au sommet que de la case $(n, n - k)$ au sommet.

Une fois ces propriétés explicitées, on leur propose de remplir quelques lignes supplémentaires (fiche 2) et de calculer la **somme des nombres sur chaque ligne**. Ils remarquent que celle-ci double à chaque fois, mais là encore, ils ont du mal à expliciter pourquoi. C'est le bon moment pour leur montrer un exemple de situation où une conjecture s'avère être fautive : le nombre de régions d'un disque délimitées par les segments joignant n points placés sur le bord semble être 2^{n-1} . C'est vrai jusqu'à $n = 5$, mais faux pour $n = 6$. Il faut donc vraiment trouver une démonstration si on veut accepter que la somme des nombres sur la n -ème ligne du triangle de Pascal est 2^n . Une façon de le prouver est d'utiliser la propriété déjà vue (le contenu de chaque case est la somme des deux nombres du dessus) et le fait que chaque terme de la ligne n est compté 2 fois quand on somme les termes de la ligne $(n + 1)$.

On propose de chercher si certaines cases du triangle auraient pu être remplies directement (sans connaître les valeurs dans la ligne précédente). Sur la première diagonale (en vert sur la figure), il n'y a que des 1. Sur la deuxième diagonale (en jaune), on voit tous les entiers : 1, 2, 3, ... Les nombres apparaissant sur la troisième diagonale (en bleu) sont les *nombres triangulaires*.



Après les avoir un peu laissés chercher, on leur explique comment calculer le n -ième nombre triangulaire $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (s'ils sont en 3ème, on choisit une valeur explicite pour n).

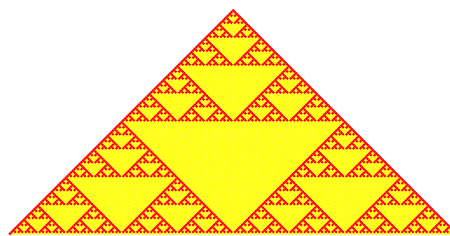
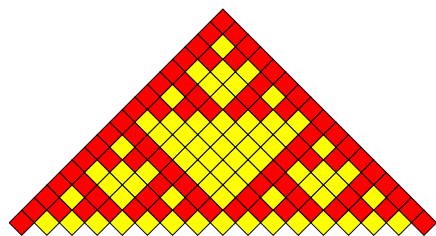
Compléments. Si on a le temps, on leur fait calculer $(a + b)^n$ pour $n = 1, 2, 3, 4$. On leur fait remarquer que quand on range les termes par ordre croissant des puissances de b , les coefficients qui apparaissent dans le développement de $(a + b)^n$ sont les nombres de la ligne n du triangle de Pascal. Pour cette raison, les nombres dans le triangle de Pascal sont appelés *coefficients binomiaux*.

Un autre complément possible est de faire le lien avec la planche de Galton (voir ici¹ pour une simulation).

2. COLORIAGE

Sur la 3ème fiche, on demande aux élèves de colorier en rouge toutes les cases du triangle correspondant à un nombre impair et en jaune toutes les cases correspondant à un nombre pair. En général, ils commencent par calculer les valeurs dans les cases. Certains pensent à ne garder que le chiffre des unités, il est plus rare qu'ils se rendent compte qu'on peut le faire sans aucun calcul puisque la somme de 2 nombres pairs ou de 2 nombres impairs est paire et la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est impaire. Pour trouver la couleur d'une case, il suffit donc d'observer la couleur des deux cases au-dessus.

Une fois qu'ils ont colorié le triangle de la fiche 3, on leur montre ce qu'ils auraient trouvé dans des triangles de plus en plus grand (avec 32, 64 puis 128 lignes). Plus on colorie de lignes, et plus le dessin se rapproche du *triangle de Sierpinski*.

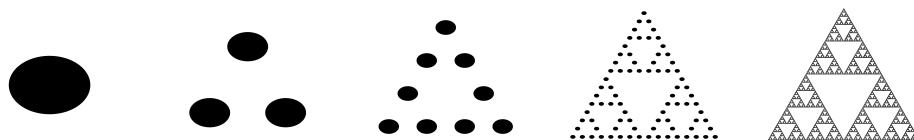


¹<https://sorciersdesalem.math.cnrs.fr/Galton/galton.html>

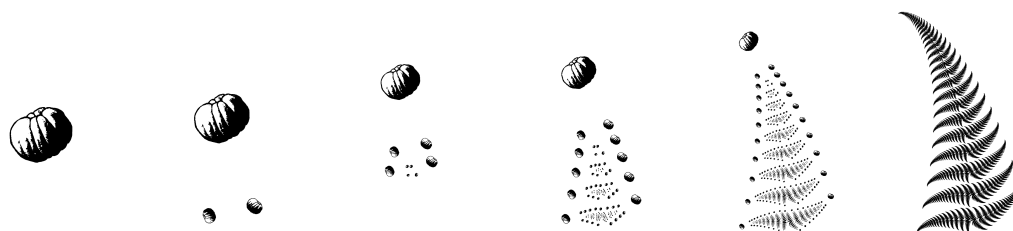
C'est alors l'occasion de leur parler de *fractale*, un objet composé de plusieurs morceaux semblables à lui-même. Par exemple, le triangle de Sierpinski est la réunion de trois plus petits triangles de Sierpinski.

Après leur avoir montré des fractales apparaissant dans la nature (chou romanesco, fougères, etc.), on leur montre une autre façon de construire le triangle de Sierpinski.

Si on applique trois homothéties de rapport $\frac{1}{2}$ à un objet quelconque, voilà ce que l'on obtient en itérant ce procédé 1, 2, 5 et 10 fois.



En remplaçant les trois homothéties par d'autres transformations du plan, on peut obtenir une jolie fougère.



Selon le temps, on peut finir l'atelier en leur montrant d'autres jolies fractales, ou une autre méthode pour obtenir le triangle de Sierpinski : on part d'un triangle équilatéral plein. Les milieux de ses côtés forment un triangle équilatéral plus petit, que l'on enlève. On applique le même procédé sur les trois triangles qui restent. On en obtient alors 9, encore plus petits. On recommence sur chacun de ces 9 triangles, et ainsi de suite...

