

Le jeu de l'oie avec des dés, ou la théorie du couplage

Nils Berglund *

September 26, 2023

Niveau : CE1 pour jouer au tour de magie, seconde pour comprendre l'explication.

Durée : 15 minutes.

Abstract

J'ai découvert cette activité dans une exposition itinérante du Mathematikum de Gießen. On peut la présenter comme un tour de magie, mais elle illustre également le calcul de probabilité et une technique appelée *couplage*, très utile en probabilités. Il suffit de savoir compter jusqu'à 6 pour jouer, mais des connaissances en calcul de probabilités sont importantes pour estimer les probabilités.

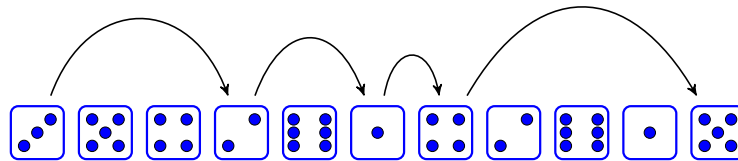
Matériel

Des dés à jouer. Idéalement, il en faudrait une cinquantaine, mais cela fonctionne aussi avec moins de dés. L'expérience marche d'autant mieux que le nombre de dés est important.

Marche à suivre

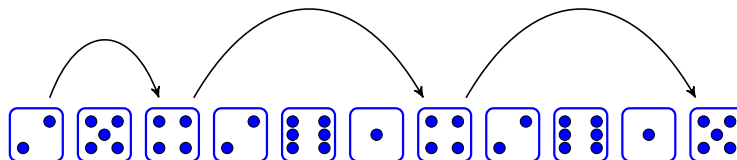
1. On jette les dés et on les dispose sur une seule rangée.
2. En partant du premier dé, on avance d'autant de pas que le dé a de points. Dans l'exemple ci-dessous, le premier dé a trois points, on avance donc de trois pas, pour arriver au quatrième dé. On poursuit ainsi, jusqu'à ce qu'on arrive au dernier dé, ou qu'on ne puisse plus continuer.

Il se peut en effet que le dernier dé visité ait un nombre de points supérieur au nombre de dés restant à sa droite. Dans ce cas, on enlève simplement ces dés devenus inutiles.



*Université d'Orléans, Institut Denis Poisson, CNRS UMR 7013

3. On relance alors le premier dé, et on recommence. Dans l'exemple ci-dessous, le dé relancé est tombé sur 2, on avance donc de deux pas jusqu'au troisième dé, puis de quatre pas, et ainsi de suite.



Chose qui peut surprendre : bien que les premiers pas changent, on arrive à nouveau exactement au bout de la rangée. En fait, le lecteur peut vérifier que cela reste le cas, dans cet exemple, quelle que soit la valeur du premier dé. Quel est ce miracle ?

Explication

Il faut tout d'abord remarquer que le tour ne fonctionne pas à tous les coups. Supposons par exemple que dans la configuration initiale, tous les dés indiquent 2. On ne parcourt alors que les dés se trouvant aux positions impaires 1, 3, 5, ... Si le premier dé, une fois relancé, tombe sur 1, on parcourra alors les positions paires, et on n'arrivera pas au bout de la chaîne.

Il est toutefois fort probable que le tour réussisse, et cette probabilité augmente avec le nombre de dés. Comment l'estimer ? L'observation cruciale est la suivante : Supposons que l'on ait marqué en rouge tous les dés visités lors du premier parcours. Pour que l'on n'arrive *pas* au bout lors du second parcours, il faut que l'on évite tous les dés rouges, ce qui est assez peu probable, surtout si la chaîne est longue.



On peut estimer la probabilité que le tour rate de la manière suivante. La longueur des pas prend des valeurs de 1 à 6, chacune avec la même probabilité de $1/6$. La longueur moyenne des pas est donc de $(1+2+3+4+5+6)/6 = 7/2$. Cela nous permet tout d'abord d'estimer le nombre p de pas : s'il y a n dés en tout, celui-ci devrait être proche de $n/(7/2)$, soit $p = 2n/7$.

Comme la longueur des pas est de 6 au plus, partant d'un dé quelconque, on sait qu'au moins l'un des 6 dés suivants est rouge. La probabilité de ne pas atteindre ce dé est de $5/6$. Il en découle que la probabilité de ne visiter aucun dé rouge en p pas ne peut dépasser

$$(5/6)^p = (5/6)^{2n/7}$$

soit environ 7% s'il y a 50 dés, et moins d'un pourcent s'il y a 100 dés.

Le raisonnement présenté ici est approximatif. Il existe des modélisations plus précises, basées sur la théorie des chaînes de Markov, qui donnent une valeur exacte, mais nécessitent un calcul par ordinateur (il s'agit de trouver le rayon spectral d'une matrice assez grande). On trouvera des détails (en langue allemande) sur la page <https://de.wikipedia.org/wiki/W%C3%BCrfelschlange>.

Couplage : L'explication du tour utilise un argument dit de *couplage*, qui a été introduit par Wolfgang Doeblin pour étudier la convergence vers l'équilibre de chaînes de Markov sur un ensemble fini. Une chaîne de Markov est un processus aléatoire, admettant un nombre fini d'états, qu'on peut numéroter $1, 2, \dots, N$. Ce processus parcourt les états avec des probabilités fixes de passer de l'état i à l'état j , les sauts étant choisis de manière indépendante. Cela implique que deux trajectoires, partant d'états différents, vont avoir la même distribution de probabilité à partir du moment où elles ont visité simultanément le même état. Ainsi, toutes les trajectoires vont finir par avoir la même distribution, pourvu que la chaîne soit *irréductible*, c'est-à-dire qu'il y ait une probabilité non nulle, partant de n'importe quel état, d'atteindre tout autre état, éventuellement en plusieurs sauts.