Le comptage de cubes par le théorème des restes chinois

Françoise Pène*

26 septembre 2023

Durée : 15 à 30 minutes

Niveau : Cycle 3

Résumé

L'activité se présente sous forme d'un jeu utilisant le "théorème des restes chinois" (dans sa version la plus simple, avec deux congruences) qui dit notamment la chose suivante :

"Celui ou celle qui connaît les restes des divisions par 10 *et par* 11 *connaît le reste de la division par* $10 \times 11 = 110$*"*

Cette activité peut se faire avec de petits enfants sachant compter jusqu'à 11 et accompagnés par des adultes, ou bien avec enfants plus grands sachant compter jusqu'à 110. Les explications mathématiques utilisent des multiplications et additions et peuvent être faites en lien avec un cours sur la division euclidienne. Cette animation est diffusée depuis une vingtaine d'année dans le "petit livret mathémagique brestois"

Matériel

109 cubes à empiler, de type gros Lego carrés. De quoi écrire pour les explications.

Déroulé du tour

On prépare un sac de cubes contenant au maximum 109 cubes. On demande à quelqu'un :

*Univ Brest, Université de Brest, LMBA, CNRS UMR 6205

- de prendre une partie des cubes (appelons N le nombre inconnu de ces cubes) ;
- puis de faire, avec ces N cubes, autant de tours de 10 cubes que possible et de dire combien de cubes il reste (appelons R_{10} ce reste) ;
- et enfin de faire des tours de 11 cubes et de dire combien de cubes il reste (appelons R_{11} ce reste).

On ne regarde pas pendant que la personne fait les 3 étapes précédentes (par exemple on tourne le dos, ou bien on est derrière une paroi), et, quand la personne a fini, on annonce : "Vous avez pris ... cubes". Pour cela, on a calculé rapidement la valeur de N par la formule : $N = 11 \times R_{10} - 10 \times R_{11}$ auquel on ajoute éventuellement 110 (si le nombre obtenu est négatif, ce qui se produit si $R_{10} < R_{11}$) de sorte à avoir un résultat compris entre 0 et 109 (conseil : dès qu'on connaît R_{10} et pendant que la personne fait les tours de 11, on peut déjà calculer $11 \times R_{10}$ et aussi $11 \times R_{10} + 110$, le reste du calcul est très facile et pourra se faire très vite).
On peut expliquer qu'on ne connaît le nombre qu'à un multiple de $10 \times 11 = 110$ près et qu'on a fait attention à ne pas avoir plus de 109 cubes (109 au cas où quelqu'un choisirait d'en prendre 0 ce qui est autorisé).

Trop facile ?

Si quelqu'un dit : "c'est trop facile, vous avez déjà l'unité", on peut dire :

- on a choisi 10 et 11 car cela facilite les calculs mais on peut faire le même tour (toujours à partir de 109 cubes) avec 11 et 12, ou avec 7 et 18, mais pas avec 10 et 12 (ce fait peut paraître surprenant car 12 est plus grand que 11, cela expliqué à la fin de cette fiche).
- cela marche avec les restes, mais pas avec le nombre de tours (par exemple, si on dit qu'on a 1 tour de 10 et 1 tour de 11, il y a 9 nombres possibles),
- "Alors allez-y, expliquez-moi" (et les aider si besoin à faire le raisonnement qui suit).

Explications

- R_{10} est le chiffre des unités de N. Il nous reste donc à déterminer quel était le nombre de tours de 10 cubes.
- Si $R_{11} \leq R_{10}$, alors la personne a utilisé $R_{10} - R_{11}$ cubes [1] pour compléter ses tours de 10 en tours de 11 et donc le nombre de tours de 10 cubes était $R_{10} - R_{11}$, d'où $N = (R_{10} - R_{11}) \times 10 + R_{10}$.

1. et pas plus, car si une tour de 10 disparaissait entièrement, cela signifierait que la personne aurait complété 10 tours de 10 avec une 11ème tour de 10, donc qu'il y aurait plus de 109 cubes.

— En particulier, si $R_{10} = R_{11}$, alors le nombre N est égal à ces restes.
— Si $R_{10} < R_{11}$, alors la personne a complètement vidé le "reste" de la division par 10 et a commencé à vider une tour de 10 pour compléter les autres tours de 10 en tours de 11 et donc le nombre de tours de 10 cubes était $1+(10-R_{11})+R_{10}$, d'où $N = (11+R_{10}-R_{11})\times 10+R_{10} = 110 + 11 \times R_{10} - 10 \times R_{11}$.

Généralisation aux nombres consécutifs

La formule utilise le fait que $11 - 10 = 1$. On peut remplacer 10 et 11 par $A \geq 1$ et $B = A + 1$, préparer un sac contenant au maximum $A \times B - 1$ cubes, demander de faire des tours de A cubes, puis des tours de B cubes et demander les restes R_A et R_B. Le nombre N de cubes sera : $N = B \times R_A - A \times R_B$ auquel il faudra ajouter $A \times B$ si ce nombre est négatif.
On peut donner une preuve : en écrivant Q_A et Q_B pour le nombre de tours, $N = N \times B - N \times A = (Q_A \times A + R_A) \times B - (Q_B \times B + R_B) \times A$. Donc : $N = A \times B \times (Q_A - Q_B) + B \times R_A - A \times R_B$.

Généralisation aux nombres premiers entre eux

On pourra évoquer le fait que la réciproque est toujours vraie (si on connaît le reste par $A \times B$, alors on connaît le reste par A et le reste par B), mais qu'on ne peut pas toujours déterminer le reste par $A \times B$ à partir des restes par A et par B.

On peut dire que la bonne condition (nécessaire et suffisante) est que les nombres A et B soient premiers entre eux grâce au théorème de Bezout qui assure qu'on peut alors trouver deux entiers (positifs ou négatifs) U et V tels que : $A \times U + B \times V = 1$. On a : $N = A \times U \times (Q_B \times B + R_B) + B \times V \times (Q_A \times A + R_A)$. Le nombre N de cubes est donc : $A \times U \times R_B + B \times V \times R_A$ plus ou moins un multiple de $A \times B$ et il n'y a qu'un seul nombre de ce type dans $\{0, ..., A \times B - 1\}$.

Selon l'auditoire, on peut aller plus loin, expliquer que pour des A et B non premiers entre eux, on peut adapter le tour quitte à avoir moins de $PGCD(A, B)$ cubes (on peut expliquer que les restes par 10 et par 22 donnent "la même information" que les restes par 10 et par 11 ; et que les restes par 10 et par 12 donnent le reste par $pgcd(10, 12) = 60$, par exemple 1 et 61 ont les mêmes restes par 10 et par 12).

Mention historique : Cette méthode (appelée *Théorème des restes chinois*) apparaissait déjà dans le livre de Sun Zi (le Sunzi suanjing, 3ème siècle) dans un exercice portant sur le comptage de soldats chinois.