# Ni jeu de Nim, ni jeu de Marienbad, ni jeu de Fort-Boyard : le jeu des bâtonnets

Françoise Pène[*], Frédérique Plantevin[†], André Stef[‡]

Niveau : à partir du Cycle 3
Durée : de 10-30 minutes (animation tout public) à 1h30 (atelier en classe entière)

**Résumé**

Cette activité, qui permet de découvrir la notion de stratégie gagnante dans un jeu est un succès assuré. Elle est adaptable suivant le joueur, son âge, sa rapidité de compréhension, sa curiosité et son envie de comprendre. La simplicité de sa règle du jeu le rend très accessible. Sa forme de duel pique la curiosité. L'existence d'une stratégie gagnante pour un des deux joueurs déstabilise et intrigue, d'autant plus que ce jeu est familier pour nombre de personnes pour diverses raisons dont le jeu télévisé de Fort-Boyard qui l'a grandement popularisé.

Après une présentation générale de ce jeu, nous en exposerons deux implémentations : une activité en classe entière par André Stef ; puis différentes pratiques adaptées à des stands du type Fête de la Science, par Françoise Pène et Frédérique Plantevin.

## Matériel

Pour l'animation tout public : 21 bâtonnets
Matériel pour l'atelier en classe :
- 20 bâtonnets par binôme pour l'atelier en classe
- Un rétro-projecteur ou flexcam reliée à un vidéoprojecteur (pour visualiser).
- Un tableau (pour synthèse).

[*]Univ Brest, Université de Brest, LMBA, CNRS UMR 6205.
[†]Univ Brest, Université de Brest, LMBA, CNRS UMR 6205.
[‡]Université de Lorraine, IECL, CNRS UMR 7502

# Prérequis et compétences travaillées

Prérequis : aucun.

Compétences travaillées : raisonnement élémentaire, étude par disjonction de cas. Notion d'algorithme. Suites logiques. Division euclidienne. Relation de congruence modulo 4, classes de congruence.

# Présentation du jeu

## Règles

Dans le jeu télévisé de Fort-Boyard, le candidat joue contre le maître du jeu pour gagner du temps dans la salle du trésor. Un de ces défis est le jeu des bâtonnets. Celui qui propose le jeu prend le rôle du maître du jeu et joue en second. Un plateau placé entre les adversaires présente un certain nombre de bâtonnets.

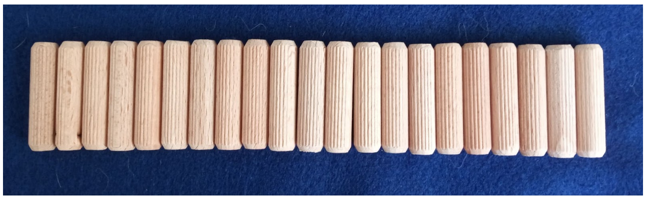

Figure 1 – La configuration de départ du jeu.

Les règles sont les suivantes :

— Un tas de 20 ou 21 bâtonnets (ou bâtonnets, chevilles en bois...) est donné.
— Deux joueurs jouent alternativement jusqu'à la fin de la partie.
— Chacun des deux joueurs enlève du plateau 1, 2 ou 3 bâtonnets à tour de rôle.
— Celui qui enlève le dernier bâtonnet (ou les derniers bâtonnets) perd la partie.

Il arrive fréquemment que ce jeu soit connu des joueurs auxquels il est proposé, non seulement à cause du jeu télévisé mais aussi parce qu'il est régulièrement présenté aux enfants dans le cadre périscolaire. Mais dans tous ces cadres, la stratégie de jeu n'est généralement pas abordée. Ici, nous montrons une animation mathématique avec un rôle possiblement formateur ; en premier lieu, cette configuration permet de pratiquer une démarche d'investigation, requise pour comprendre et être finalement capable de gagner (ou plutôt de définir les conditions dans lesquelles on peut gagner à tout coup) et ensuite, elle permet aussi de revisiter la division euclidienne, d'aborder la notion de classe de congruence modulo un entier naturel, de pratiquer le raisonnement et en particulier le raisonnement par récurrence pour montrer des résultats pour tout nombre de bâtonnets.

## Stratégie

S'il y a 21 bâtonnets au départ, il y a une stratégie gagnante pour le second joueur (le maître du jeu). Le premier joueur (le candidat) ne peut pas gagner si le maître du jeu applique la stratégie gagnante sans erreur.

FIGURE 2 – Une répartition des bâtonnets en paquets de 4.

Cette stratégie pour le maître du jeu consiste à prendre un nombre de bâtonnets égal au complément à 4 du nombre de bâtonnets que vient de prendre le candidat (3 si le candidat en a pris 1, 2 s'il en a pris 2, 1 s'il en a pris 2). Ainsi à chaque tour, 4 bâtonnets sont enlevés du plateau par les deux joueurs. Puisque $21 = 4 \times 5 + 1$, il reste 1 bâtonnet à la fin du cinquième tour, lorsque c'est à nouveau au tour du candidat de jouer. Le candidat perd donc forcément. Plus généralement, s'il y a $N$ bâtonnets au début, alors il existe une stratégie gagnante pour le maître de jeu si et seulement si $N$ est congru à 1 modulo 4. Dans ce cas (où $N$ est congru à 1 modulo 4), quoi que fasse le candidat (le premier joueur), le jeu reste en configuration gagnante pour le deuxième joueur : il peut le ramener à un nombre de bâtonnets congru à 1 modulo 4.

S'il y a 20 bâtonnets au départ, c'est au contraire pour le candidat-premier joueur qu'il y a une stratégie gagnante car logiquement, il peut toujours mettre le jeu en configuration gagnante pour le deuxième joueur qu'il sera après avoir joué : il lui suffit d'enlever 3 bâtonnets pour que le jeu soit alors à $17 = 4 \times 4 + 1$ bâtonnets lorsque le maître du jeu joue à son tour. Si le candidat connait la stratégie présentée ci-dessus et l'applique sans erreur, il bat le maître du jeu quoi que ce dernier fasse.

Dans le cas général, face à un joueur qui ne connaît pas la stratégie gagnante, il est souvent possible pour le maître du jeu de se ramener à une configuration gagnante, c'est-à-dire avec des bâtonnets en paquets de 4 plus 1 tout seul à la fin de son tour, quelle que soit la configuration de départ.

## Autour du jeu

Ce jeu est souvent appelé jeu “de Fort Boyard” ou parfois associé aux jeux de Nim [1], appelés eux-mêmes souvent jeu “de Marienbad [2]”. Quel que soit le nom qu'on lui donne, on peut le voir comme une sorte de jeu de Nim à un paquet [3], avec une contrainte sur le nombre de bâtonnets que l'on peut retirer à chaque coup. Avec cette règle, il est en version *misère* : celui qui prend le dernier bâtonnet perd. C'est un jeu à stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs selon le nombre de bâtonnets au départ.

Dans Fort-Boyard, le nombre de bâtonnets a varié depuis le début de l'émission (été 1995) entre 20, 18 et 21 mais ce sont toujours les candidats qui jouent en premier. Il est à noter que même avec 21, le maître du jeu ne gagne pas toujours...

## Variantes

Diverses variantes sont possibles :
- Modifier le nombre de bâtonnets initiaux.
- Modifier le nombre de bâtonnets que l'on peut prendre à chaque coup.
- Modifier la règle de gain : celui qui prend le dernier bâtonnet gagne [4]. Ce jeu s'appelle aussi la Course à 20 : partant de 0, chaque joueur ajoute à son tour 1,2 ou 3. Celui qui arrive exactement à 20 gagne.

Dans les jeux de Nim, il y a plusieurs tas de bâtonnets. Lors de son tour, chaque joueur choisit un tas non vide, puis prend autant de bâtonnets (au moins 1) qu'il le souhaite dans ce tas. En général, celui qui prend le dernier bâtonnet (ou les derniers bâtonnets) du jeu gagne la partie, mais une version *misère* existe aussi.

# Un exemple d'atelier en classe entière au cycle 3

Les élèves vont jouer par groupes de 2 joueurs, en face à face dans un premier temps, pour expérimenter, constater, conjecturer. Puis une synthèse sera faite avec le groupe classe.

1. Bouton, C. L. (1901). Nim, A Game with a Complete Mathematical Theory. Annals of Mathematics, 3(1/4), 35 ?39. https ://doi.org/10.2307/1967631

2. En référence au fameux film d'Alain Resnais *L'année dernière à Marienbad*, qui a popularisé ces jeux en 1961

3. Ou une ligne pour faire référence à *L'année dernière à Marienbad*.

4. Cela n'inverse pas les configurations gagnantes et perdantes par rapport à la règle initiale : 1,5,9 deviennent gagnants, 4,8,... deviennent perdants, mais 2,3,6,7,... restent gagnants

## Introduction (10 min.)

L'activité est menée par un animateur qui n'est pas forcément un enseignant habituel de la classe ; lorsque c'est le cas, les enseignants et les éventuels autres adultes accompagnant la classe pour l'occasion peuvent participer utilement à l'encadrement dans la première phase de découverte du jeu.

Constituer des groupes de deux élèves (binômes) et distribuer 20 bâtonnets à chaque binôme. Présenter le jeu au groupe classe. L'animateur peut jouer une ou deux parties contre un élève avec les bâtonnets posés sur le rétroprojecteur allumé.

## Première phase d'expérimentation (15 min.)

Les élèves travaillent en binômes.

Au début (5 min.), l'animateur passe dans la classe, regarde et écoute ce que font les élèves Puis, petit à petit l'animateur intervient auprès des binômes lorsqu'il reste peu de bâtonnets en jeu, selon ce qu'ils ont découvert ou non, en demandant s'il y a une "bonne" manière de finir la partie.

Certains groupes réalisent, assez rapidement, que la configuration est perdante pour celui qui doit jouer lorsqu'il reste 5 bâtonnets. Pour convaincre les autres binômes dans le cas où il reste 5 bâtonnets, l'animateur demande quoi jouer et, sur les propositions d'un joueur, demande à l'autre ce qu'il ferait ("Il y en a 5. *Si* je choisis d'en prendre un l'autre choisira d'en prendre 3 et il ne m'en restera qu'un, donc je perdrais. *Si* je choisis d'en prendre 2, ..."). Il est utile d'illustrer ce raisonnement en se servant des bâtonnets sur la table.

Les joueurs se convainquent petit à petit qu'il faut arriver à "mettre" l'autre à 5. Mais comment y arriver ? Laisser chercher.

## Seconde phase d'expérimentation (15 min.)

Les élèves travaillent toujours en binômes.

L'animateur incite alors à l'étude de tous les cas, c'est-à dire quelle stratégie adopter s'il reste plus de 5 bâtonnets, dans l'ordre : 6, 7, 8 , ... pour finir à 20. Pour les aider, il peut amorcer la récurrence[5] ainsi :

— "s'il y en a 6, je vais gagner car si j'en prends 1, il en restera alors 5 et je sais que c'est perdant pour l'autre."
— "s'il y en a 7, je vais gagner car si j'en prends 2..."
— "s'il y en a 8, j'en prends 3..."

5. Sans utiliser ce mot !

Un point délicat sera le passage à 9 bâtonnets. “S’il y en a 9, alors

— Si j’en prends 1, il en prendra 3 (car il joue de manière optimale, même si cela ne me plaît pas) et m’en laissera 5, et je suis en position perdante.
— Si j’en prends 2, il en prendra 2, et il m’en restera 5.
— Si j’en prends 3, il en prendra 1...”
— Conclusion : *quoi que* je joue (disjonction de cas), l’autre joueur pourra faire en sorte de me laisser ensuite 5 bâtonnets. Donc 9 est une configuration perdante.

Lorsqu’il y a 10 bâtonnets, les joueurs essaient de mettre en place un raisonnement difficile à base de “si... et si...” répétés. L’amorce de récurrence ne suffit pas pour tous les élèves : ils ne parviennent pas à ce stade à raccrocher la connaissance de “9 : configuration perdante” à leur compréhension du jeu. Rappeler aux joueurs qu’on peut utiliser cette connaissance pour dire que 10 est gagnant car il suffit de prendre un bâtonnet pour laisser l’autre joueur en configuration perdante.

## Phase de regroupement (20 min.)

Les éléments constatés avec les groupes sont repris, avec la participation de toute la classe, en les illustrant avec les bâtonnets sur le rétroprojecteur. Les points saillants sont : 5 bâtonnets, puis le groupe 6, 7, 8, le passage à 9, et enfin 10 bâtonnets.

On dit qu’une configuration (ou le nombre de bâtonnets) est *gagnante* pour le joueur dont c’est le tour de jouer s’il existe une stratégie[6] pour ce joueur pour gagner *quoi que* joue l’autre joueur dans la suite de la partie.

On dit qu’une configuration (ou le nombre de bâtonnets) est *perdante* pour le joueur dont c’est le tour de jouer si, *quoi qu*’il joue, il place l’autre joueur en configuration gagnante.

Au fur et à mesure de l’étude, le tableau suivant est complété sur le tableau de la classe.

Pour conclure, avec 20 bâtonnets initiaux, le premier joueur est *gagnant*, *s*’il joue bien, *quoi que* puisse jouer l’autre joueur. Et le coup du premier joueur consiste à prendre 3 bâtonnets pour laisser 17 bâtonnets au second joueur.

6. Ou simplement ici : si j’ai une manière de jouer.

| GAGNANTE | PERDANTE |
|---|---|
| | 1 |
| 2,3,4 | 5 |
| 6,7,8 | 9 |
| 10,11,12 | 13 |
| 14,15,16 | 17 |
| 18,19,20 | |

Figure 3 – Tableau de synthèse des nombres de bâtonnets des configurations gagnantes et perdantes pour celui qui va jouer.

### Situation plus générale (20 min.)

En classe entière, l'animateur demande aux élèves s'ils constatent quelque chose dans le tableau, par exemple sur la colonne des configurations perdantes.

Des élèves proposeront qu'ils sont impairs, mais s'ils sont bien tous impairs, ce ne sont pas tous les nombres impairs (inférieurs à 20). On cherche une particularité des nombres de la colonne de droite que n'ont pas ceux de la colonne de gauche. L'idée apparaitra que ces nombres “vont de 4 en 4”. Préciser que c'est en partant de 1, puis par exemple que ce sont *exactement* les nombres de la forme “1 plus un multiple de 4”.

Pour conclure, que se passe-t-il si le nombre de bâtonnets initiaux n'est plus 20, mais un nombre appelé $N$ ? La configuration est-elle gagnante pour celui qui va commencer ? Si oui, quel est son premier coup ? L'objectif est de faire émerger l'idée de la division euclidienne et la remarque qu'un nombre est de la forme “1 plus un multiple de 4” exactement [7] lorsque son reste dans la division par 4 est égal à 1. $N$ est alors une configuration perdante pour celui qui va jouer si le reste de la division de $N$ par 4 est égal à 1, gagnante sinon.

Suivant le temps disponible, explorer diverses variantes (différent nombre de bâtonnets que l'on peut prendre à chaque coup, celui qui prend le dernier bâtonnet gagne...).

## Animation tous publics

Nous présenterons maintenant différentes pratiques, utilisables sous forme de stand ou d'atelier pour la Fête de la Science. L'animation commence

7. À défaut de dire *si et seulement si*, qui serait prématuré de plusieurs années.

toujours avec un jeu à 21 bâtonnets et s'appuie sur cette configuration pour explorer les autres cas. Les bâtonnets sont le seul matériel nécessaire. Selon l'humeur, selon le candidat et la façon dont il entre dans le jeu, on peut le laisser découvrir qu'il y a une stratégie gagnante ou le lui dire, l'amener à découvrir les règles pour gagner en suivant son intuition et ses idées ou le guider plus activement vers la solution. Ces variantes sont présentées ci-dessous.

## Exploration

Jouer plusieurs fois sans rien dire, laisser le joueur constater qu'il perd à chaque fois. Le laisser réfléchir. On peut échanger les rôles (selon le souhait des joueurs) ou laisser librement jouer des joueurs les uns contre les autres et constater que les choses sont alors plus ouvertes. Cette phase permet au joueur d'accepter l'idée qu'il ne peut pas gagner contre le maître du jeu, mais qu'il peut apprendre à endosser son rôle.

Une fois cette phase d'exploration passée, amener le joueur à réfléchir en verbalisant les mouvements faits quand il reste seulement un petit nombre de bâtonnets : que faire s'il reste juste 1 bâtonnet, juste 2, juste 3, juste 4, juste 5 ; constater que cette dernière configuration est perdante et qu'il en est du coup de même avec 4 bâtonnets de plus et ainsi de suite jusqu'à 21 (donc pour : 9, 13, 17, 21) .

## Visite guidée

Prévenir le joueur qu'il va perdre sauf si le maître du jeu se trompe et lui conseiller d'observer ce qu'il fait. Faire plusieurs parties ainsi : le joueur peut se rendre compte que le maître du jeu prend toujours le complément à 4 du nombre de bâtonnets pris par le joueur. L'inviter à réfléchir lorsqu'il n'y a plus que 5 bâtonnets et que c'est à lui de jouer.

## Visite guidée (variante)

Prévenir qu'il y a une stratégie gagnante pour celui qui joue en second, laisser le joueur jouer en second, attendre qu'il fasse une erreur (le lui dire alors ou pas), reprendre la main, et appliquer la stratégie.

## Et ensuite...

Une fois la stratégie comprise :

— Inverser les rôles (la pression est sur le joueur car il doit gagner s'il ne fait pas d'erreur).
— Si un joueur arrive et applique la règle sans la comprendre ou lorsque le joueur a bien compris la stratégie, on peut changer le nombre de bâtonnets, changer la règle (voir-ci dessous).
— On peut laisser la place de maître du jeu à un joueur qui a compris le laisser faire l'animation à notre place avec des joueurs qui n'ont pas assisté aux explications (en vérifiant juste que rien de faux n'est dit).

Pour aller plus avant, il faut essayer de défier la toute nouvelle science du joueur, tout d'abord en changeant le nombre initial de bâtonnets. Amener le joueur à constater que la stratégie ci-dessus s'applique pour tout nombre de bâtonnets congru à 1 modulo 4. Plus généralement, la stratégie qui consiste à "se ramener à la fin de son tour à des paquets de 4 et 1 tout seul" (si on peut le faire) reste la bonne. Ainsi, il y a toujours une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs : pour le second joueur si le nombre de bâtonnets au début est congru à 1 modulo 4, pour le premier joueur dans les 3 autres cas. On peut amener le joueur à formuler la stratégie dans chacun des 4 cas.

Comme dans l'atelier précédent, suivant le temps disponible, explorer diverses variantes : différent nombre de bâtonnets que l'on peut prendre à chaque coup [8], celui qui prend le dernier bâtonnet gagne [9]...

# En guise de conclusion

On le voit, ce jeu se prête bien à une activité d'animation scientifique avec ou sans visée pédagogique explicite. On peut en exploiter le potentiel mathématiques de manière adaptée au public auquel elle est proposée. Elle peut, en particulier, être utile même pour des étudiants, y compris en mathématiques, comme ont pu le constater les auteurs dans des déclinaisons de l'activité non relatées ici.

# Remerciements

Un grand merci à Damien Thomine pour sa réalisation de la fusion de ce qui était au départ deux articles et plus généralement pour son accompagnement dans la finalisation de cet article.

8. Si l'on peut prendre 1, 2, ..., $N$ bâtonnets, se ramener à des paquets de $(N+1)$ bâtonnets et 1 bâtonnet seul.
9. La stratégie est alors de se ramener à la fin de son tour à des paquets de $(N+1)$ bâtonnets.