

# Des nœuds en bâtons

Léa Dusollier et Hoel Queffelec

25 avril 2023

## 1 Les nœuds

Un nœud en mathématiques n'est que la formalisation de ce que chacun imagine : une ficelle nouée. Seule différence : on en recolle les bouts. Le nœud le plus simple est le nœud trivial, qui consiste en un simple anneau de ficelle. Il en existe d'autres, plus compliqués - pour le plus grand bonheur des marins et des grimpeurs. Un nœud donné peut être déformé pour se présenter sous une forme plus ou moins compliquée : c'est une expérience que chacun peut faire avec, au choix, des fils d'écouteurs, de cerf-volant ou une ligne de canne à pêche.

## 2 Des nœuds avec des bâtons

Généralement, on réalise des nœuds avec des ficelles, des cordes, bref, des choses molles. Ici, on se propose d'en réaliser avec des bâtons. Au-delà de l'aspect ludique qui consiste à manipuler de grandes perches, l'une des motivations vient de la biologie et de la chimie : si on modélise une molécule par une succession d'atomes reliés par des liaisons, est-il possible qu'une molécule (disons, ronde pour simplifier) forme un nœud ? Et pour un nœud donné, quel est le nombre minimal d'atomes à mettre en jeu pour avoir une chance de l'observer ?

## 3 Matériel

- bâtons (au moins 6 par groupe) d'environ 1m20, typiquement des tourillons de 1 à 2 cm de diamètre qu'on trouve dans tous les magasins de bricolage.
- éventuellement, une corde d'une dizaine de mètres de long.

## 4 Mise en place

Les participants se mettent par groupes de trois ou quatre, et chaque groupe prend au moins 6 bâtons. Le but est de déterminer le nombre minimal de bâtons pour faire un nœud. Généralement, l'intervenant guide la discussion autour du nœud trivial assez rapidement : un bâton, ça ne suffit pas pour faire un nœud, puisque les deux extrémités ne peuvent pas être recollées. Avec deux bâtons, c'est une question de convention : soit on considère que deux bâtons superposés forment un nœud trivial, soit on l'interdit, et il faut monter à trois bâtons pour former un triangle, qui est un nœud trivial. Consigne est donnée de réaliser un nœud de trèfle avec les bâtons, le but étant trouver une réalisation d'un nœud non trivial avec un nombre minimum de bâtons. Former un trèfle avec six bâtons fournira cette réalisation.

## 5 Et ça ressemble à quoi ?



FIGURE 1 – Membres de l'IMAG en pleine construction

En gros, ça ressemble à peu près aux photos de la figure ???. Le but est de mettre les bâtons bout à bout pour former un nœud de trèfle. Comme nous n'avons pas encore trouvé de méthode pratique pour attacher les extrémités, les participants les tiennent eux-mêmes. Les premiers essais produisent souvent une étoile à six branches (qui donne soit deux nœuds triviaux soit un entrelacs de Hopf), ou alors un nœud trivial. Pour guider les participants, on peut leur suggérer de dessiner un diagramme du nœud de trèfle avec six bâtons. Ce n'est pas si facile, mais si on parle de sigle nucléaire ça peut aider (voir la figure ??).

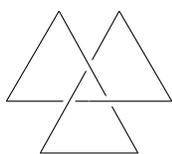


FIGURE 2 – Diagramme de trèfle à 6 bâtons

Pour tester les réalisations, on peut faire passer une corde le long des bâtons (voir la photo en figure ??), attacher les deux extrémités puis laisser tomber les bâtons et vérifier en manipulant la corde qu'on arrive bien à reproduire un joli nœud de trèfle. Quelques remarques au passage : ça peut être plus facile de ne pas imposer que tous les bâtons soient de la même longueur. Il suffit de s'autoriser à assembler deux bâtons ailleurs qu'à leurs extrémités. Si on veut vraiment imposer que tous les bâtons sont de même longueur, on parle d'*equilateral stick number*.

## 6 Défi final

En utilisant un bâton, les deux avant-bras, les deux bras et le tronc, former un nœud de trèfle. Voilà qui permet une jolie photo d'illustration (la preuve en figure ??)! (Mais ça vaut la peine de s'être entraîné à l'avance, ce n'est pas si facile.)

## 7 6 bâtons au moins, la preuve !

Après avoir réalisé le trèfle avec six bâtons, on aimerait montrer qu'il faut au moins six bâtons pour réaliser un nœud non trivial. On s'est déjà

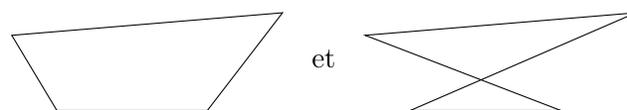


FIGURE 3 – Le test de la corde



FIGURE 4 – Photo finale

convaincu-e-s que trois bâtons ne laissent pas assez de liberté pour produire autre chose qu'un nœud trivial. On peut ensuite recenser les diagrammes de nœuds (c'est-à-dire les *dessins*) qu'on peut obtenir avec quatre segments. Il n'y en a que deux types :



La version de gauche décrit un nœud trivial, et quelle que soit la manière d'indiquer l'information dessus/dessous sur le croisement à droite, on peut le défaire pour trouver également un nœud trivial. Arrive maintenant le tour de magie : à 5 bâtons, il suffit de placer l'un des cinq bâtons verticalement pour obtenir une projection sur un diagramme à quatre segments. On obtient donc également toujours un nœud trivial avec cinq bâtons.

## 8 Timing indicatif et public

Après une courte introduction (un peu plus longue si cette activité ne fait pas suite à une autre autour des nœuds, par exemple le sac de nœuds), la discussion autour du nœud trivial ne dure que quelques minutes. La réalisation du nœud de trèfle peut occuper de 10 à 20 minutes, surtout si on prend le temps de faire les tests avec la corde. La preuve finale prend encore quelques minutes de plus (prévoir un peu de temps pour expliquer pourquoi l'argument du passage de 4 à 5 bâtons ne marche plus pour passer de 5 à 6 bâtons).

Cette séance a été testée avec des élèves de primaire ainsi qu'avec des lycéens, et des collègues volontaires pour une séance photo. Pour les plus jeunes, nous n'avons pas présenté la preuve finale.

## 9 Un invariant : le nombre minimal de bâtons

Le nombre minimal de bâtons nécessaires à sa réalisation est une quantité qu'on peut associer à n'importe quel nœud : on parle d'*invariant*. Malgré la simplicité de cette définition, on ne sait presque rien de cette quantité : elle peut être calculée exactement (et de manière très élégante) pour certains nœuds dits toriques, mais il reste du travail.

## 10 Références

Les notions sur les nœuds en bâtons proviennent de l'article de Colin Adams *Why knots: knots, molecules and stick numbers* sur [plus.math.org](http://plus.math.org).

La base de données KnotProt recense les structures nouées des protéines.

Le site Images des mathématiques propose plusieurs articles autour des nœuds. Un numéro spécial de *Pour la science* évoque plein de questions reliées aux nœuds, et les livres *Knots and links* de Cromwell et *Knots* de Sossinsky sont parmi les plus accessibles. Le site internet des *Sorciers de Salem* présente également deux posters très bien faits. Notons également que l'activité décrite ci-dessus est présente sous forme de fiche sur le site internet des *Kits mathématiques*.

## Remerciements

Mille mercis aux collègues qui ont participé à la séance photo : Sylvain Brochard, Alice Cleyen, Anne Cortella, Thierry Mignon, Louise Nysen, Ivan Rasskin, Mireille Soergel, ainsi qu'à Hichame Filali Moutei du service communication de l'Université de Montpellier pour le reportage photo. H.Q. est financé par le programme Marie Skłodowska-Curie de la Commission Européenne.