

Mélanie GUENAIIS et Damien THOMINE

L'atelier présenté ici a pour objectif de travailler sur la mesure de longueurs et la notion de fractales. Long d'1h30, il est constitué de deux parties distinctes : mesurer la côte de Bretagne, puis construire un flocon de Koch. Ces deux parties peuvent constituer chacune un atelier à part entière, comme nous le détaillerons à la fin.

Côte de Bretagne et flocon de Koch

Généralités

Niveau : À partir de la 6ème.

Durée : 1h30.

Objectifs : Mesurer la longueur de la côte de Bretagne. Construire un flocon de Koch.

Pré-requis : Utilisation du compas. Mesure de longueurs. Proportionnalité avec rapports entiers (“2 fois plus”, “3 fois moins”). Notion d'échelle.

Compétences travaillées : En plus des pré-requis, travail en binôme. Travail manuel. Démarche expérimentale et raisonnement inductif.

Matériel

Partie Côte de Bretagne

Une photo de la côte des Landes¹ et une photo d'une côte bretonne très découpée², plastifiées, format A3 ou A2.

Un compas pour tableau et trois feutres pour tableau de couleurs bleue, verte et rouge.

Une photo aérienne d'une partie de la côte de Bretagne par binôme, format A3, papier mat.

Trois feutres, crayons ou stylos bille de couleurs bleue, verte et rouge par binôme.

Une règle, un compas et un crayon par binôme.

Un support papier pour noter ses mesures par binôme.

Partie Flocon de Koch

Dans ce qui suit, tous les triangles sont équilatéraux, en papier coloré épais (160g/m²). Choisir des couleurs différentes (par exemple des dégradés) suivant la taille.

Optionnel : une très grande étoile à 6 branches (12 côtés de 27cm) en carton ou en mousse.

2 “très grands” triangles de côté 27cm pour 6 élèves.

2 “grands” triangles de côté 9cm par élève.

12 triangles “moyens” de côté 3cm par élève.

Optionnel : nombreux “petits” triangles de côté 1cm par élève.

Un tube de colle par élève.

¹Qui est particulièrement rectiligne.

²Par exemple autour de Perros-Guirec.

Mesurer la côte de Bretagne

Dans cette partie, les élèves sont répartis en binômes.

Introduction (10 min.)

Après une introduction générale, introduire l'objectif de l'atelier. On va mesurer des longueurs ; comment faire ? Comment mesurer la longueur ou la largeur de la salle ? La mesurer à l'aide de pas. On peut convertir ensuite la longueur mesurée en mètres en la multipliant par la longueur d'un pas, puisque les pas sont de même longueur.

Pour mesurer une longueur de côte, on pourrait marcher le long de celle-ci. Pour cet atelier, on va utiliser des cartes. Celles-ci sont munies d'une échelle, et pour faire des pas de même longueur, on va utiliser un compas. On va mesurer la longueur de la côte avec des pas de longueur 1km (8cm à l'échelle³), puis 500m (4cm à l'échelle), puis 250m (2cm à l'échelle). Marquer les grands pas en bleu, les pas moyens en rouge et les petits pas en vert.

Afficher la photo aérienne de la carte des Landes et présenter en classe entière le protocole avec un autre animateur. L'un marque les pas avec le compas le long de la côte, pendant que l'autre marque les points où se posent la pointe. Relier ensuite les différents points au feutre bleu, puis compter avec les élèves le nombre de pas et la longueur mesurée. On recommence avec les pas de 500m et 250m. Faire remarquer que les points des pas moyens et petits sont sur le premier chemin. Même s'il y a des erreurs de mesures, on trouve à peu près la même longueur de côte avec les trois longueurs de pas, et les petits pas donnent une mesure plus précise de cette longueur.

Mesure de la côte bretonne (25 min.)

Distribuer une photo aérienne de la côte de Bretagne par binôme. Les élèves appliquent le protocole présenté en classe entière sur la carte des Landes pour obtenir deux mesures de la côte bretonne (trois pour les plus rapides), en commençant par le plus grand pas, et en respectant l'échelle. Chaque binôme marque ses résultats (nombre de pas, longueur d'un pas et longueur totale) sur une feuille.

Vérifier que les points sont reliés avant de passer à un pas plus petit. Veiller à ce que les nouveaux points suivent la côte, et non le chemin qu'ils viennent de tracer.

Les élèves ont tendance à se rassurer en comparant leurs résultats. Il faut insister pour qu'ils gardent leurs propres résultats, en précisant que les différences ne sont pas des erreurs.

Préparer un tableau de résultats pour la classe, et faire reporter les mesures obtenues par chaque binôme à la fin.

Bilan (10 min.)

Tout d'abord, comparer les mesures obtenues par les différents binômes. On obtient une assez grande variation (en général entre 7 et 11km pour le plus grand pas). Questionner les enfants sur l'origine de ces erreurs⁴.

Ensuite, comparer les mesures obtenues avec les différentes tailles de pas. La mesure de longueur augmente lorsque le pas diminue. Plus le pas est petit, plus le procédé de mesure suit des détours qui allongent le chemin.

Lorsque le pas est divisé par 4, la mesure est presque multipliée par 2 ; on peut demander de calculer théoriquement ce que donnerait la mesure si le pas était à échelle humaine (1 mètre). On trouverait par cette méthode une longueur de l'ordre de 200km ! On ne donnera finalement pas de valeur définitive à la longueur de la côte : la mesure devra être donnée avec son échelle⁵.

³Donnée ici à titre indicatif, elle peut dépendre de la carte.

⁴Par exemple : choix du point de départ et d'arrivée du chemin, imprécision dans l'écartement du compas, délimitation de la côte et choix – ou non – de passer par des presqu'îles...

⁵C'est l'effet Richardson, analysé par B. Mandelbrot [1].

Afin de faire le lien avec la seconde partie de l'atelier, introduire la notion d'objet fractal ; à ce niveau, il s'agit d'un objet tel que l'on retrouve approximativement le même motif, à toute échelle et en tout point.

Construire un flocon de Koch

Introduction (5 min.)

On va maintenant construire un objet fractal au sens précédent. Son bord sera compliqué, mais présentera le même motif à plusieurs échelles. Les élèves vont maintenant travailler individuellement. Distribuer à chacun 2 "grands" triangles équilatéraux, de côté 9cm.

Construction individuelle (30 min.)

On part d'un triangle équilatéral qui est assimilé à la première étape de l'objet qu'on fabrique. Comme pour la mesure de la côte, on peut mesurer son contour à l'aide de pas, en l'occurrence 3 pas de 9cm. Commencer à compléter un tableau indiquant la longueur d'un pas, le nombre de pas et la mesure du contour de la figure.

Demander comment obtenir des triangles 3 fois plus petits. En superposant les 2 triangles identiques, on obtient une étoile à 6 branches dont le contour est plus long que le triangle de départ. Déterminer le périmètre de la nouvelle figure ; on peut suivre son contour avec 12 pas de 3cm. Compléter le tableau précédent.

Ne pas coller directement les deux triangles, au risque que leur superposition soit approximative. Distribuer les triangles "moyens" de côté 3cm, et coller 3 triangles moyens sur chaque grand triangle, un à chaque sommet, d'un seul côté. Les triangles moyens ainsi rajoutés permettent de caler les grands triangles. On peut alors coller deux grands triangles ensemble pour obtenir une étoile à 6 branches. Faire attention à ce que les 6 triangles moyens soient du même côté !

Demander au élèves comment faire pour continuer la construction. Coller des triangles moyens tête-bêche pour faire apparaître 6 nouvelles étoiles.

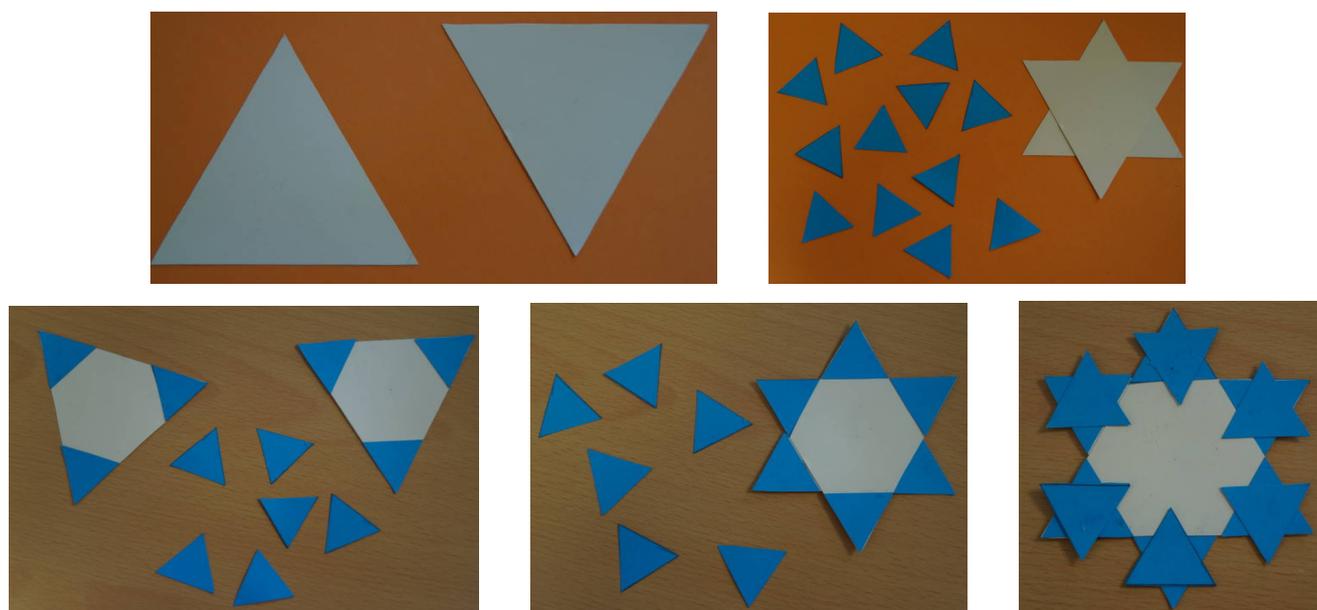


Figure 1: Construction du flocon avec les grands triangles et les triangles moyens (pas initial de 9cm, pas final de 1cm).

Bilan (10 min.)

À chaque étape, compléter le tableau et déterminer le périmètre de la figure. Le but est que les élèves perçoivent l'aspect multiplicatif du processus. Les pas sont divisés par 3 à chaque étape, et au lieu de compter un par un le nombre de pas, on remarque que le nombre de pas est multiplié par 4 à chaque étape ; le périmètre est donc multiplié par $4/3$.

Même sans la construire, on peut imaginer la suite. Calculer par exemple cette longueur après 10 ou 20 étapes, et le nombre de triangles nécessaires. Constaté que la figure obtenue reste néanmoins bornée.

Construction en groupe (5 min.)

Puisque rajouter des triangles plus petits devient trop difficile, changeons de point de vue. Comment passer d'un "grand" pas à un "très grand" pas ? Suggérer de considérer chaque étoile comme l'une des moyennes étoiles sur leur flocon. On attend qu'ils proposent de mettre leurs étoiles en commun. Par combien ? Quelle va être la taille du très grand pas comparé au grand pas de leur construction ?

On donne à chaque groupe de 6 élèves 2 "très grands" triangles équilatéraux de côté 27cm. Pour fabriquer une nouvelle étoile régulière, les élèves repèrent sur les triangles le tiers de chacun des côtés, puis collent les 2 très grands triangles. Chaque élève du groupe colle son étoile sur l'une des branches de la grande étoile⁶.

Pour clore l'atelier, on peut utiliser l'étoile de côté⁷ 27cm afin de réaliser une étape de construction supplémentaire, et obtenir à la fin un objet unique et décoratif pour la classe⁸.

Pour aller plus loin

Il est possible de découper cet atelier en deux ateliers d'une heure. Le temps gagné permettra de mesurer sereinement les longueurs de côtes avec le plus petit pas. De plus, lors de la construction du flocon de Koch, on pourra demander aux élèves de construire⁹ eux-même les triangles équilatéraux de côté 9cm dans des rectangles de 10cm \times 16cm, et l'on disposera de suffisamment de temps pour distribuer et coller les "petits" triangles de 1cm.

Des justifications mathématiques peuvent être plus ou moins demandées selon le niveau. On pourra aller jusqu'à aborder les suites géométriques, voire, dans le supérieur, estimer la dimension fractale de la côte de Bretagne.

Dans le cadre de la Maison d'Initiation et de Sensibilisation aux Sciences¹⁰ (Orsay), ces deux ateliers font partie d'une journée entière sur le thème *Mathématiques et botanique*.

References

- [1] B. Mandelbrot, *How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension*, Science, New Series **156** (1967), no. 3775, 636–638.

⁶On pourra dire aux élèves d'écrire leur nom sur leur étoile, afin de repérer leur contribution.

⁷C'est-à-dire la superposition de deux triangles équilatéraux de côté 81cm.

⁸Il faut pour cela 30 à 36 étoiles individuelles, ce qui est souvent possible quitte à mettre à contribution les animateurs et les encadrants.

⁹Attention au matériel que cela demande : règle graduée, compas, crayon, ciseaux.

¹⁰Voir le site : <http://hebergement.u-psud.fr/miss/>, et spécifiquement <http://hebergement.u-psud.fr/miss/ateliers/maths-et-botanique/> pour l'atelier *Mathématiques et botanique*.