Quel sac de nœuds !

Les nœuds

Un nœud en mathématiques n'est que la formalisation de ce que chacun imagine : une ficelle nouée. Seule différence : on en recolle les bouts. Le nœud le plus simple est le nœud trivial, qui consiste en un simple anneau de ficelle. Il en existe d'autres, plus compliqués - pour le plus grand bonheur des marins et des grimpeurs. Un nœud donné peut être déformé pour se présenter sous une forme plus ou moins compliquée : c'est une expérience que chacun peut faire avec, au choix, des fils d'écouteurs, de cerf-volant ou une ligne de canne à pêche.
L'étude mathématique des nœuds remonte à Lord Kelvin (le même que pour le degré Kelvin), qui avait imaginé que les atomes étaient de petits nœuds dans l'éther. Être capable de classifier les nœuds permettrait alors de donner une liste des atomes. Si cette idée a finalement été abandonnée, l'étude mathématique des nœuds s'était entre-temps développée et a accompagné tout au long du 20ème siècle la formalisation de ce qu'on appelle la *topologie algébrique*. Toujours d'une brûlante actualité, la théorie des nœuds touche aujourd'hui à l'algèbre, la géométrie, la topologie, mais retrouve aussi un ancrage plus concret, en physique quantique, en biochimie avec des applications pour l'ADN, les protéines, ou encore avec des contributions de l'intelligence artificielle.

Matériel

Les nœuds peuvent être fabriqués à l'aide d'un cordage en matériau plastique (disponible dans les grands magasins de bricolage, au mètre ou par pelotes). Nous avons réalisé chacun des diagrammes de la table des nœuds, puis nous en avons soudé les bouts en les faisant fondre légèrement avec un briquet avant de les assembler (ça ne sent pas très bon, à faire en extérieur). La soudure est plutôt solide. Nous avons ensuite recouvert les soudures avec un fil à broder d'une couleur différente pour chaque nœud, avant d'écrire sur une antisèche la table des correspondances entre couleur du fil et nom du nœud. Un piège à éviter (il n'a pas été évité pour le kit proposé au prêt) : bien faire attention au sens des croisements, sous peine de réaliser un nœud miroir (voir les deux versions du trèfle qui entourent le titre de cette fiche).
Chacun de ces nœuds est ensuite entortillé le plus possible (voire l'image), puis ils sont rangés dans un sac dans lequel les participants piocheront. Outre l'antisèche que nous gardons précieusement, nous avons également collé des exemplaires de la table des nœuds sur des feuilles cartonnées.

Un nœud, des diagrammes

Un nœud est un objet "mou" vivant en 3 dimensions : on peut le manipuler, tirer sur certaines parties de la ficelle, le déformer à l'envie. Voilà qui n'est pas du tout pratique pour un mathématicien. On préfère donc travailler avec une certaine représentation de ce nœud, appelé *diagramme* : c'est ce qui apparaît dans la table des nœuds ci-dessous. Il s'agit d'une projection en deux dimensions où pour chaque croisement, on garde l'information de quel brin passe au-dessus de l'autre. Il est assez facile de voir qu'à partir d'un diagramme, on peut reconstruire le nœud associé. Par contre si on bouge le nœud, le diagramme change : à un nœud donné correspondent une infinité de diagrammes... reliés par ce qu'on appelle *mouvements de Reidemeister*.

Table des nœuds

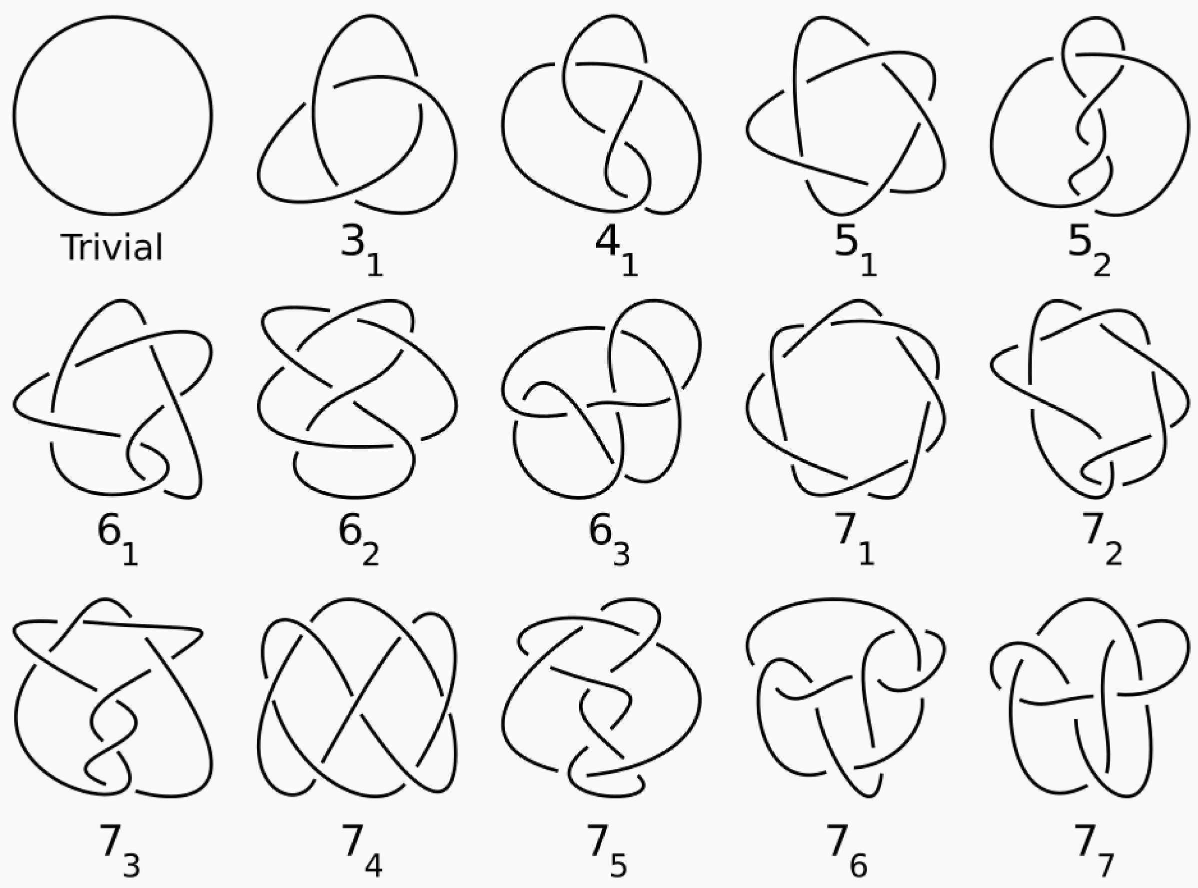

Image originale de jkasd disponible sur Wikipedia.

Une précision : cette table des nœuds liste tous les nœuds premiers (plus le trivial) pour lesquels il existe un diagramme à moins de 7 croisements, à miroir près. Cela signifie deux choses : d'abord, que pour certains des nœuds (et notamment le trèfle), si on change l'information dessus/dessous à chacun des croisements, on obtient un nœud différent (et ce n'est pas si facile à montrer !). Ensuite, qu'on peut aussi coller deux nœuds de cette liste pour en obtenir un nouveau : on parle de *somme connexe*. C'est un processus analogue à la décomposition d'un entier en facteurs premiers : plutôt que de donner la liste des entiers de 1 à 20, on gagne de la place en ne listant que les nombres premiers (et le 1).

Déroulé de la séance

Le nœud 4_1 (miroir...)

Le but de cette séance est de faire manipuler au grand public des nœuds concrets, en introduisant des notions de classification, de représentation graphique, ou encore d'invariant (on y parle souvent de *nombre minimal de croisements*). Chaque participant reçoit un nœud et une table des nœuds, et a pour mission d'identifier le nœud qui lui a été confié. Concrètement, il faut le mettre sous une forme qui reproduise le diagramme donné sur la table des nœuds : en partant de la photo du haut ci-contre, on simplifie petit à petit le nœud pour arriver en bas à quelque chose qui peut être comparé au dessin du nœud 4_1 donné sur la table. En particulier avec des enfants, il est bon de préciser qu'ils ont le droit de toucher au nœud et de tirer sur les ficelles : beaucoup n'osent pas et tentent de résoudre le problème simplement en regardant leur nœud.
Certains participants ayant hérité d'un nœud facile trouveront rapidement la réponse, et il peut être bon d'avoir plus de nœuds que de participants pour qu'ils aient une deuxième chance. D'autres auront besoin d'aide. Ça peut être un bon moment pour inciter à compter les croisements, à suivre un brin et regarder la succession de passages dessus/dessous, etc... pour faire une conjecture et tenter de mettre le nœud sous la forme correspondante. Nous finissons généralement la séance avec une vérification générale : si tout va bien, chaque nœud apparaît une et une seule fois.
Si les séances s'enchaînent, ne pas oublier de ré-entortiller les nœuds ! La séance peut se prolonger (sauf peut-être avec les plus jeunes publics ?) sur une discussion sur les mouvements de Reidemeister, voire la notion d'invariant et l'exemple des 3-coloriages de Fox ou du nombre minimal de bâtons.
Timing indicatif : 5' de préparation pour entortiller les nœuds, 5' de recherche libre, 5' à 10' de recherche avec aide de l'intervenant, 3' de vérification générale. Débriefing éventuel sur les mouvements de Reidemeister.
Âge : séance réalisée avec des lycéens (Semaine des sciences à Lunel, Fête de la Science à Mende), des collégiens (MathC2+), et même des classes de primaire (CP au CE2, Fête de la Science à Montpellier). Pour les plus petits, l'activité dure rarement plus de 10 minutes, avec un débriefing minimal, mais marche malgré tout très bien.

Intérêt pédagogique

Par rapport au programme publié au BO n°31 du 30 juillet 2020, cette activité est intéressante à partir du cycle 3 (CM1-CM2). Elle permet une entrée progressive dans l'abstraction, et contribue à enrichir la culture scientifique en proposant un travail sur la notion de nœuds qui n'apparaît d'habitude pas en classe. À travers la manipulation et la recherche libre, plusieurs compétences mathématiques sont travaillées : représenter, raisonner, communiquer.
Pour le cycle 4 et plus, cette activité qui articule le concret et l'abstrait sans entrer dans les détails techniques peut être utilisée comme introduction avant une activité sur les 3-coloriages de Fox, participant ainsi à varier les situations de raisonnement et initier à la démonstration.

Références

Quelques articles sur le site Images des mathématiques :
- *Une famille infinie de nœuds* et sa suite. (T. Godin et H. Queffelec) On y introduit les notions de base et on y parle de 3-coloriages de Fox.
- *Des nœuds indétordables* (F. Le Roux et P. Massot)
- *Peut-on dénouer l'icosaèdre ?* (C. Caubel) On y trouve notamment une introduction au théorème de Reidemeister plus agréable que la page Wikipedia.
- *Des beaux entrelacs* (C. Mercat)

Un numéro spécial de *Pour la science* évoque plein de questions reliées aux nœuds, et le livre *Knots and links* de Cromwell est peut-être le plus accessible des livres de cours.

Fiche réalisée par Léa Dusollier et Hoel Queffelec. Remerciements à Anne Cortella, Thibault Godin et aux élèves cobayes.