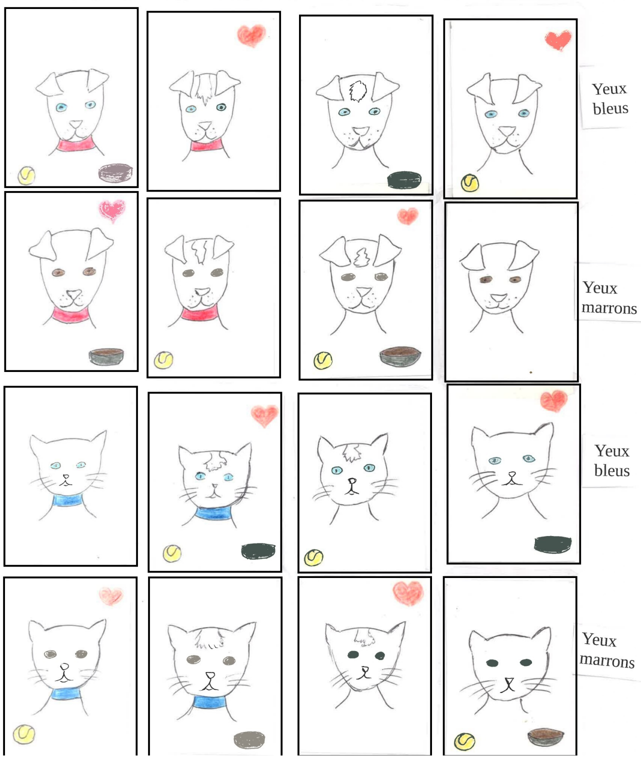
CODES CORRECTEURS D'ERREURS ET JEU DE CARTES (AVEC OU SANS MENSONGE)

ALFREDÉRIC JOSSE ET FRANÇOISE PÈNE

Les codes correcteurs d'erreurs permettent par exemple d'écouter la musique d'un CD même si le CD a été abîmé. L'idée consiste à coder par plus de chiffres que nécessaire. Nous utilisons ici un **code correcteur d'erreur** dû à Richard Hamming (en 1950) [1] afin d'identifier une carte à partir d'informations potentiellement fausses. Pour plus de détails, on pourra consulter la version longue de cet article disponible sur Hal ou sur *Kits*. On peut aussi faire ce tour avec 16 cartes d'un jeu de 32 cartes [2].

1. Tour de magie (à partir de l'école primaire)

On demande à une personne de choisir une carte parmi les 16 cartes ci-dessous et on va trouver cette carte à l'aide de 7 questions auxquelles la personne devra répondre par 'oui' ou par 'non', en ayant le droit de mentir à une question au maximum.



Ces cartes à découper (avec indication des couleurs en cas d'impression en noir et blanc) et d'autres supports pour cette activité (liste de questions, version longue de cet article, etc.) sont disponibles sur le site *Kits Mathématiques (Kits)*.

Consigne avant le tour : La personne ne doit pas nous dire quelle carte a été choisie, mais peut le dire aux autres personnes dans l'assistance (on peut donner la liste de questions et s'éloigner un peu). Si la personne choisit de le dire à l'assistance, il est préférable qu'elle décide dès ce moment s'il y aura ou non mensonge et si oui

1. Richard Wesley Hamming (1950). Error detecting and error correcting codes. Bell System Technical Journal. 29 (2) : 147–160.

2. voir la vidéo `https://www.youtube.com/watch?v=28KlUS-hRlw`

à quelle question et d'en informer l'assistance, afin d'éviter que quelqu'un dans l'assistance dise *'non, ce n'est pas cela'* si la personne ment.

Les 7 Questions : On commence par poser les 4 questions suivantes :

1. Est-ce un chat ? *Par exemple la personne répond oui.*
2. A-t-il un collier ? *Par exemple la personne répond oui.*
3. A-t-il les yeux bleus ? *Par exemple la personne répond oui.*
4. A-t-il une marque sur la tête ? *Par exemple la personne répond oui.*

On marque une pause, on demande à la personne de ne rien révéler. On explique que ces 4 questions suffiraient à déterminer la carte s'il était interdit de mentir. Mais un mensonge étant autorisé, on pose aussi les 3 questions suivantes :

5. Y a-t-il un coeur sur la carte ? *Par exemple la personne répond non.*
6. Y a-t-il un balle sur la carte ? *Par exemple la personne répond non.*
7. Y a-t-il un gamelle sur la carte ? *Par exemple la personne répond oui.*

On conclut quelle était la carte choisie par la personne. *Pour l'exemple, c'est le chat avec collier, marque sur la tête et yeux marrons.*

2. Trouver la bonne carte (à partir de l'école primaire)

Nous présentons ici brièvement plusieurs méthodes permettant de trouver la carte choisie (on peut utiliser plusieurs de ces méthodes simultanément). Vous trouverez sur le site *Kits* des supports utiles pour trouver la bonne carte (liste de questions, tableau pour effectuer les calculs avec déduction, tableau pour effectuer le calcul matriciel, fichier xls pour corriger le mensonge et déterminer la carte en utilisant un tableur) et des explications supplémentaires (dans la version longue de l'article).

2.1. Par manipulation des cartes.

On dispose les cartes comme présenté ci-dessus (afin de faciliter les manipulations). À chaque réponse, la personne valide 8 cartes et en rejette 8 autres, et on tourne les cartes rejetées dont la face est visible :

— on tourne de 90° les cartes qui sont dans leur position initiale (ces cartes sont rejetées pour la 1ère fois),

— on retourne face contre la table les cartes qui ont déjà été tournées de 90° (ces cartes sont rejetées pour la 2ème fois, elles sont donc éliminées).

Au bout de 4 questions, une seule carte est en position initiale (et donc n'a jamais été rejetée) : c'est la carte choisie s'il n'y a pas de mensonge autorisé. Au bout de 7 questions, la carte choisie est la seule qui n'a pas été retournée face contre la table et il y a eu mensonge si cette carte a été tournée de 90 degrés.

2.2. Par calculs et déduction.

On pose $r_j = 1$ si la réponse à la question j est 'oui' et $r_j = 0$ sinon. On détecte le mensonge en utilisant les faits suivants :

— $r_1+r_3+r_5+r_7$ est pair si et seulement si il n'y a pas eu mensonge aux questions 1, 3, 5 et 7. *Pour l'exemple, cette somme vaut 3, il y a donc eu un mensonge à l'une de ces 4 questions.*

— $r_2+r_3+r_6+r_7$ est pair si et seulement si il n'y a pas eu mensonge aux questions 2, 3, 6 et 7. *Pour l'exemple, cette somme vaut 3, il y a donc eu un mensonge à l'une de ces 4 questions.*

— $r_4+r_5+r_6+r_7$ est pair si et seulement si il n'y a pas eu mensonge aux questions 4, 5, 6 et 7. *Pour l'exemple, cette somme vaut 2, il n'y a donc pas eu de mensonge à ces 4 questions.*

Ainsi, dans l'exemple, la personne a menti à la question 3.

2.3. **Par calcul matriciel.** On écrit le tableau suivant (en noir) et au-dessus les réponses r_j aux questions (en bleu), on efface ou barre les colonnes correspondant à $r_j = 0$, c'est-à-dire à un 'non'. Pour la ligne i, on compte le nombre de '1' restants sur la ligne, on écrit $n_i = 1$ si ce nombre est impair et $n_i = 0$ sinon. Cela donne dans le cas général, puis pour l'exemple :

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 & r_7 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & & & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si $n_1 = n_2 = n_3 = 0$, il n'y a pas de mensonge. Sinon, on obtient une colonne de la matrice, disons la colonne j, et il y a mensonge à la question j (ce j est aussi $j = n_1 + 2 \times n_2 + 4 \times n_3$). *Pour l'exemple, on obtient : la 3ème colonne du tableau ; ce qui indique un mensonge à la question 3.*

2.4. **Par programmation (terminale scientifique ou études supérieures).** Ceci est faisable, y compris sur un tableur de smartphone (type WPS Office sur Android) ou d'ordinateur (type Excel, Libre Office Calc). Voir le site *Kits* pour plus de détails.

3. Même jeu avec 2 ou 4 cartes (à partir de l'école primaire)

On demande combien de questions au minimum il faut poser pour déterminer 1 carte choisie parmi 2 cartes puis parmi 4 cartes (au lieu de 16) dans un jeu avec au maximum un mensonge possible. On précise que les questions ne doivent pas dépendre des réponses et qu'on doit y répondre par 'oui' ou 'non' seulement. On laisse les personnes tester différentes possibilités.

3.1. **Jeu avec 2 cartes.** Pour déterminer 1 carte parmi 2, 1 question suffit s'il n'y a pas de mensonge autorisé, 2 questions permettent de **détecter** un mensonge, mais il en faudra 3 pour **corriger** un mensonge.

3.2. **Jeu avec 4 cartes.** Pour déterminer 1 carte parmi 4, 2 questions suffisent s'il n'y a pas de mensonge autorisé, on n'arrive pas à moins de 5 questions pour corriger un mensonge, soit 3 questions supplémentaires (comme dans le cas de 16 cartes).

4. Explications mathématiques sur le tour avec 16 cartes et cas général (Terminale Scientifique ou études supérieures)

4.1. **Comment le tour de 16 cartes a-t-il été réalisé ?**
Choix des 4 premières questions. Nous avons choisi 4 caractères ayant chacun 2 possibilités : chat/chien, avec/sans collier, yeux bleus/marrons, avec/sans marque sur la tête. Chacune des 16 cartes est caractérisée par les réponses sans mensonge r_1, r_2, r_3, r_4 aux 4 premières questions.
Choix des 3 dernières questions : Attribution des symboles cœur, balle et gamelle. On met un **cœur** aux cartes telles que $r_5 := r_2 + r_3 + r_4$ vaut 1 ou 3, une **balle** aux cartes telles que $r_6 := r_1 + r_3 + r_4$ vaut 1 ou 3, et une **gamelle** aux cartes telles que $r_7 := r_1 + r_2 + r_4$ vaut 1 ou 3. Avec ces choix (correspondant aux réponses sans mensonge), les 3 sommes de contrôle $r_1 + r_3 + r_5 + r_7$, $r_2 + r_3 + r_6 + r_7$ et $r_4 + r_5 + r_6 + r_7$ sont paires. Si la personne ment à la question j, la parité de r_j est changée et les sommes ci-dessus dans lesquelles r_j apparaît sont alors impaires.

4.2. **Nombre minimal de questions pour pouvoir corriger un mensonge (ou une erreur).** On code M cartes par N bits : $r_1, ..., r_N \in \{0,1\}$. Pour chaque carte, il faut au moins $N+1$ codes distincts : le code sans erreur et, pour chaque $j \in \{1, ..., N\}$, le code avec une erreur en r_j. Donc $M(N+1) \le 2^N$, i.e. $M \le 2^N/(N+1)$.

Si $M = 4$, on a $2^4/(4+1) < 4 \le 2^5/(5+1)$, ce qui prouve qu'il faut $N = 5$ questions au minimum. Pour nos 16 cartes, on a : $M = 16$, $N = 7$ et $M(N+1) = 2^7 = 2^N$.

4.3. **Code de Hamming général.** On code $M = 2^{2^m - m - 1}$ cartes par $N = 2^m - 1$ bits. Ces M cartes sont codées par $2^m - m - 1$ bits s'il n'y a pas d'erreur, auxquels sont ajoutés m bits pour corriger une erreur. On peut mettre les $2^m - m - 1$ questions suffisantes (s'il n'y a pas d'erreur) pour coder l'information dans les bits r_i avec $i \notin \{2^j;\ j = 0, ..., m-1\}$, puis définir r_{2^j} (pour $j = 0, ..., m-1$) comme la somme des r_i avec $i \ne 2^j$ de la forme $i = \sum_{k=0}^{m-1} a_k 2^k$ avec $a_k \in \{0,1\}$ et $a_j = 1$.

Univ Brest, Université de Brest, LMBA, UMR CNRS 6205
Email address: alfrederic.josse@univ-brest.fr,francoise.pene@univ-brest.fr