

Réseau routier des apprenti·e·s mathématicien·ne·s

I. Jeu du réseau routier

Cette activité s'intéresse au *jeu du réseau routier*. Dans ce jeu à deux joueurs, on veut relier des villes par des routes en respectant certaines contraintes.

Déroulement d'une partie

- On commence par placer des croix pour représenter les villes.
- Pour les relier entre elles, on dessine une ligne entre les extrémités des croix (il y a 4 extrémités par croix). Les routes ne doivent pas se croiser et on ne peut utiliser qu'une seule fois chaque extrémité.
- On trace ensuite un trait au milieu de la ligne pour représenter une nouvelle ville (elle aura 2 extrémités libres).
- Les deux joueurs jouent à tour de rôle et le dernier à pouvoir tracer une route gagne la partie.

1. Faire plusieurs parties avec une seule croix. Noter le nombre de routes tracées et préciser qui gagne à chaque fois (J1, le joueur qui commence ou J2, celui qui joue en deuxième) Que remarquez-vous ?

2. Remplir le tableau suivant.

Nombre initial de croix	1	2	3	4
Nombre de routes				
Gagnant				

S'agit-il d'un tableau de proportionnalité ?

3. Remplir le tableau suivant.

Nombre initial de croix	1	2	3	4
Nombre de routes + 2				

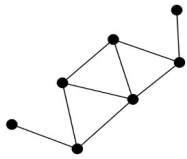
S'agit-il d'un tableau de proportionnalité ? Quelle relation peut-on conjecturer entre le nombre de routes et le nombre initial de croix.

II. Graphes

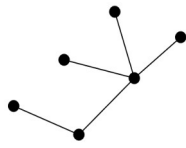
Les dessins obtenus précédemment sont des *graphes*. Un graphe est un objet mathématique formé de points (les *sommets*) reliés par des lignes (les *arêtes*). On s'intéresse uniquement aux graphes qui sont en un seul morceau et dont les arêtes ne se croisent pas. Une région entourée d'arêtes est une *face*.

Les graphes permettent de modéliser des réseaux (sociaux, informatiques, routiers...). Ils sont notamment utilisés pour comparer des itinéraires (plus court trajet).

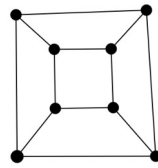
Voici quelques exemples.



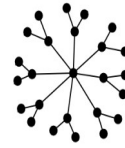
Graphe 1



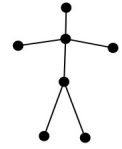
Graphe 2



Graphe 3



Graphe 4



Graphe 5

1. Pour chacun des graphes donnés ci-dessus, noter le nombre de sommets et d'arêtes.

Graphe	1	2	3	4	5
Nombre de sommets					
Nombre d'arêtes					

Y a-t-il une relation entre le nombre de sommets et d'arêtes pour les graphes 2,4 et 5 ?
Quelle est la particularité de ces graphes ?

Un graphe sans cycle (chemin partant et revenant au même sommet) est appelé un **arbre**.

2. Remplir le tableau suivant.

Graphe	1	2	3	4	5
Nombre de sommets					
Nombre d'arêtes					
Nombre de faces					

Quelle relation peut-on trouver entre le nombre de sommets, d'arêtes et de faces d'un graphe ? Il s'agit de la **formule d'Euler**.

Un **arbre générateur** d'un graphe est un arbre contenu dans ce graphe et ayant le même nombre de sommets.

3. Dessiner l'arbre générateur de chacun des graphes précédents.

III. Retour au jeu du réseau routier

1. On fixe un nombre de villes initiales v et on considère le graphe obtenu à la fin de la partie. On note r le nombre de routes construites. Exprimer le nombre de sommets, d'arêtes et de faces du graphe en fonction de v et r .

2. En utilisant la formule d'Euler, montrer que $r = 5v - 2$.

