

# Réseau routier des apprenti·e·s mathématicien·ne·s

## I. Jeu du réseau routier

Cette activité s'intéresse au *jeu du réseau routier*. Dans ce jeu à deux joueurs, on veut relier des villes par des routes en respectant certaines contraintes.

### Déroulement d'une partie

- On commence par placer des croix pour représenter les villes.
- Pour les relier entre elles, on dessine une ligne entre les extrémités des croix (il y a 4 extrémités par croix). Les routes ne doivent pas se croiser et on ne peut utiliser qu'une seule fois chaque extrémité.
- On trace ensuite un trait au milieu de la ligne pour représenter une nouvelle ville (elle aura 2 extrémités libres).
- Les deux joueurs jouent à tour de rôle et le dernier à pouvoir tracer une route gagne la partie.

1. Faire plusieurs parties avec une seule croix. Noter le nombre de routes tracées et préciser qui gagne à chaque fois (J1, le joueur qui commence ou J2, celui qui joue en deuxième) Que remarquez-vous ?

2. Remplir le tableau suivant.

Nombre initial de croix	1	2	3	4
Nombre de routes				
Gagnant				

S'agit-il d'un tableau de proportionnalité ?

3. Remplir le tableau suivant.

Nombre initial de croix	1	2	3	4
Nombre de routes + 2				

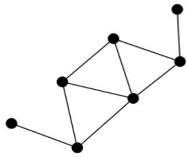
S'agit-il d'un tableau de proportionnalité ? Quelle relation peut-on conjecturer entre le nombre de routes et le nombre initial de croix.

## II. Graphes

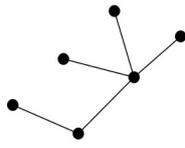
Les dessins obtenus précédemment sont des *graphes*. Un graphe est un objet mathématique formé de points (les *sommets*) reliés par des lignes (les *arêtes*). On s'intéresse uniquement aux graphes qui sont en un seul morceau et dont les arêtes ne se croisent pas. Une région entourée d'arêtes est une *face*.

Les graphes permettent de modéliser des réseaux (sociaux, informatiques, routiers...). Ils sont notamment utilisés pour comparer des itinéraires (plus court trajet).

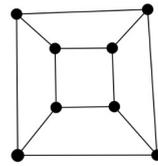
Voici quelques exemples.



Graphe 1



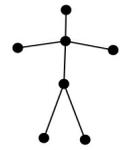
Graphe 2



Graphe 3



Graphe 4



Graphe 5

1. Pour chacun des graphes donnés ci-dessus, noter le nombre de sommets et d'arêtes.

Graphe	1	2	3	4	5
Nombre de sommets					
Nombre d'arêtes					

Y a-t-il une relation entre le nombre de sommets et d'arêtes pour les graphes 2,4 et 5 ?  
Quelle est la particularité de ces graphes ?

Un graphe sans cycle (chemin partant et revenant au même sommet) est appelé un **arbre**.

2. Remplir le tableau suivant.

Graphe	1	2	3	4	5
Nombre de sommets					
Nombre d'arêtes					
Nombre de faces					

Quelle relation peut-on trouver entre le nombre de sommets, d'arêtes et de faces d'un graphe ? Il s'agit de la **formule d'Euler**.

Un **arbre générateur** d'un graphe est un arbre contenu dans ce graphe et ayant le même nombre de sommets.

3. Dessiner l'arbre générateur de chacun des graphes précédents.

### III. Retour au jeu du réseau routier

1. On fixe un nombre de villes initiales  $v$  et on considère le graphe obtenu à la fin de la partie. On note  $r$  le nombre de routes construites. Exprimer le nombre de sommets, d'arêtes et de faces du graphe en fonction de  $v$  et  $r$ .

2. En utilisant la formule d'Euler, montrer que  $r = 5v - 2$ .

