Réseau routier des apprenti·e·s mathématicien·ne·s

Ismaïl RAZACK

Sprouts (germes, ou bourgeons, en anglais) est un jeu inventé par les mathématiciens John Conway et Michael Paterson [2]. L'activité présentée ici s'intéresse à une variante dont on peut faire une analyse complète, le *jeu du réseau routier* (également appelée *Brussel sprouts*). Dans ce jeu, on veut relier des villes entre elles par des routes en respectant certaines contraintes. On propose de découper cette activité en 3 séances d'environ 50 minutes. Il est également possible de ne faire que les deux premières séances.
Séance 1 : Après avoir joué à plusieurs parties, les élèves remarqueront que le nombre total de routes tracées dépend du nombre initial de villes.
Séance 2 : Afin de démontrer ce résultat, on utilise la notion de *graphe*. Pour les graphes *planaires* et *connexes*, il existe une relation entre le nombre de sommets, d'arêtes et de faces, il s'agit de la *formule d'Euler*. On l'utilisera pour exprimer le nombre total de routes en fonction du nombre initial de villes.
Séance 3 : La formule d'Euler est également valable pour certains polyèdres. Les élèves construiront leurs propres solides (avec le jeu de construction Polydron™) et tenteront d'identifier les polyèdres pour lesquels la formule est vraie.
Si le temps le permet on peut évoquer le lien entre ces résultats et la *topologie*, un domaine mathématique qui étudie les objets à déformation près.

1 Jeu du réseau routier

Présentation du jeu (10min)

On explique les règles aux élèves en leur montrant quelques exemples au tableau. On commence par placer des croix pour représenter les villes. Pour les relier entre elles, on dessine une ligne entre les extrémités des croix (il y a 4 extrémités par croix). On trace ensuite un trait au milieu de la ligne pour représenter une nouvelle ville (elle aura 2 extrémités libres). Les routes ne doivent pas se croiser et on ne peut utiliser une extrémité qu'une seule fois. Les 2 joueurs jouent à tour de rôle et le dernier à pouvoir tracer une route gagne la partie.

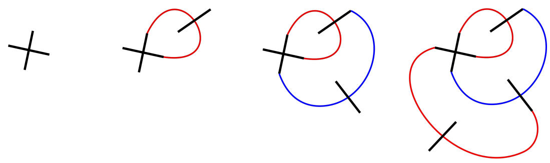

Figure 1 – Une partie avec une croix

On prendra le temps de montrer aux élèves des coups non admissibles.

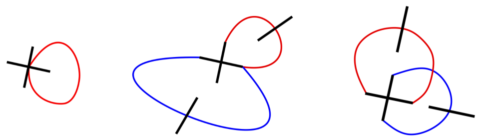

Figure 2 – Des coups non admissibles

Phase de jeu (30min + 10min de bilan)

On laisse du temps aux élèves pour jouer et remplir le tableau suivant.

Nombre initial de croix	1	2	3	4
Nombre de routes				
Gagnant				

Il faudra qu'ils fassent plusieurs parties (notamment avec une seule croix) pour remarquer qu'on trouve toujours le même nombre de routes pour un nombre initial de villes fixé.
Durant le bilan, on les guidera pour qu'ils observent que si on note v le nombre de villes initial, alors on aura $5v - 2$ routes. Pour cela, on peut ajouter une ligne "Nombre de routes + 2" et leur faire remarquer qu'on obtient un tableau de proportionnalité. A partir de la $3^{\text{ème}}$, on utilisera une représentation graphique.
La conjecture sera démontrée à la séance suivante.

2 Graphes et formule d'Euler

Le but de cette partie est de découvrir la formule d'Euler pour les graphes. Après avoir donné quelques exemples, on s'intéressera d'abord aux cas des *arbres*. La formule sera ensuite généralisée. On terminera en faisant le lien avec le jeu du réseau routier.

Définition et premiers exemples (10min)

On définit un graphe comme étant un ensemble de points (appelés *sommets*) reliés par des lignes (les *arêtes*). On peut évoquer quelques applications, notamment la détermination du trajet le plus court entre deux villes. Ceci permet d'introduire la notion de *chemin* entre deux sommets. On donne des exemples au tableau et on demande aux élèves d'en dessiner quelques uns.

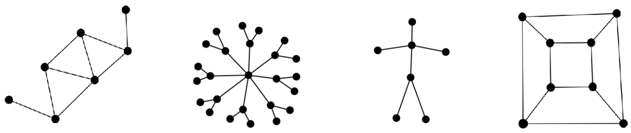

FIGURE 3 – Exemples de graphes

On fait remarquer aux élèves que les dessins du jeu sont des graphes dont les arêtes ne se coupent pas (des graphes *planaires*) et en un seul morceau (*connexe*). Dans la suite, on s'intéresse uniquement à ce type de graphe.

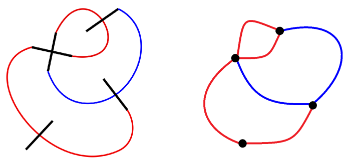

FIGURE 4 – Graphe pour une partie à une croix

Arbres et formule d'Euler (25-30 min)

Un *arbre* est un graphe sans *cycle* (chemin pour lequel le sommet de départ est aussi celui d'arrivée). Pour introduire cette notion, on présente aux élèves différents types de graphes et on leur demande de compter le nombre de sommets S et d'arêtes A. Les élèves remarquent que pour certains graphes (les arbres) on a $S = A + 1$. On les invite à formuler ce qui caractérise ces objets. On explique au tableau (sans entrer dans les détails) pourquoi la relation $S = A + 1$ est vraie pour les arbres.
Plus généralement, pour un graphe planaire, on a

$$S + F = A + 1$$

avec F le nombre de faces (on ne compte pas la face extérieure au graphe). Il s'agit de la *formule d'Euler*. Il faut d'abord qu'ils remarquent cette relation sur

des exemples. On peut leur suggérer de regarder la somme $S + F$.
Pour prouver cette formule, on introduit la notion d'*arbre générateur* d'un graphe. Il s'agit d'un arbre contenu dans le graphe et ayant les mêmes sommets. Il peut en exister plusieurs mais ils ont tous le même nombre de sommets et d'arêtes. On demande aux élèves de le construire sur des exemples. Ils observent qu'on retire successivement une arête pour chaque face. On montre ainsi que la formule d'Euler est vérifiée pour un graphe planaire si et seulement si elle est vraie pour un de ses arbres générateurs.
Pour plus de détails, on peut consulter [4].

Retour au jeu du réseau routier (10-15min)

On fixe le nombre v de villes initiales et on note r le nombre total de routes construites. Le graphe associé à cette partie de jeu a S sommets, A arêtes et F faces. On demande aux élèves d'exprimer S, A et F en fonction de v et r. En utilisant la formule d'Euler, on déduit l'égalité $r = 5v - 2$.

3 Polyèdres (50min)

Un *polyèdre* sera défini comme étant un solide dont toutes les faces sont des polygones. On demande aux élèves les polyèdres qu'ils connaissent et on leur propose de les construire à l'aide des Polydron™. On peut également leur présenter les *solides de Platon.*

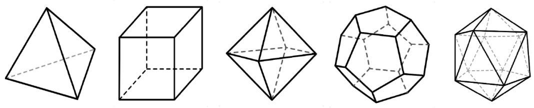

FIGURE 5 – Les solides de Platon

L'objectif est de les guider vers une généralisation de la formule d'Euler. Ils noteront le nombre de sommets, d'arêtes et de faces de chaque polyèdre et remarqueront que pour les polyèdres convexes, on trouve

$$S + F = A + 2.$$

On peut inviter les élèves à chercher des polyèdres qui ne vérifient pas la formule d'Euler. Par exemple, c'est le cas des polyèdres qui ont la forme d'un tore (on trouve alors $S + F = A$).

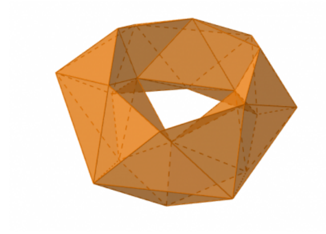

FIGURE 6 – Un exemple de polyèdre homéomorphe au tore [1]

Pour aller plus loin

Si le temps le permet, on peut terminer en évoquant la *topologie*. Il s'agit d'un domaine mathématique qui étudie les objets géométriques à déformation continue près (*homéomorphisme*). On suppose que les objets sont faits de caoutchouc et qu'on peut les étirer ou les contracter mais pas les découper ou les recoller. Pour un topologue, une sphère, un cube et une pyramide représentent le même objet, on dit qu'ils ont la même forme. Pour un polyèdre, le nombre

$$\chi = S - A + F$$

est sa *caractéristique d'Euler*. C'est un *invariant topologique* : si deux solides peuvent être déformés l'un vers l'autre alors ils auront la même caractéristique d'Euler. Comme les polyèdres convexes ont tous la forme d'une sphère, ils ont la même caractéristique d'Euler ($\chi = 2$). Plus généralement, pour un polyèdre homéomorphe à une surface fermée avec t trous, on a

$$\chi = 2 - 2t.$$

Références

[1] *Analysis Situs. La caractéristique d'Euler-Poincaré.* URL : https://analysis-situs.math.cnrs.fr/Un-invariant-topologique-la-caracteristique-d-Euler-Poincare-d-une-surface-fermee.html (visité le 01/08/2022).

[2] Martin GARDNER. « Mathematical games : Of sprouts and Brussels sprouts, games with a topological flavor ». In : *Scientific American* 217.1 (1967), p. 112-115.

[3] David S RICHESON. *Euler's Gem : The Polyhedron Formula and the Birth of Topology.* Princeton University Press, 2008.

[4] Isabel VOGT. *The game of sprouts.* URL : https://sept.mit.edu/sites/default/files/Sprouts_Euler.pdf (visité le 01/08/2022).