Diplotores – fiche d'activité

Le but essentiel, c'est de faire comprendre la question de l'existence de tores plats polyédraux, sinon la construction des diplotores apparaîtra comme quelque chose de totalement artificiel. Il faut donc passer le temps nécessaire à poser la question; l'idéal serait de faire deux ateliers, un premier pour poser la question, et un deuxième pour y répondre.

Un plan de présentation:

1. C'est quoi un tore? Montrer et faire jouer avec une bouée, un pneu, un beignet; l'essentiel, c'est le trou qui passe au milieu: on peut attacher un tore, pas une sphère. Faire passer des tores en plastique si on en a.

2. Méridiens et parallèles sur un tore; quand on découpe suivant un méridien (ou un parallèle) et qu'on redresse, on obtient un cylindre; et quand on découpe un cylindre suivant une génératrice, on obtient un rectangle. Idéalement, faire passer des tores en caoutchouc avec coupure le long d'un méridien. On pourrait commander des ballons toriques sur MathsGear.

https://mathsgear.co.uk/products/torus-balloons

Remarque philosophique: *quand on découpe une sphère le long d'un lacet, on obtient toujours deux morceaux (théorème de Jordan, très dur à prouver); ce n'est pas vrai pour un tore.*

3. Réciproquement, en partant d'un rectangle en papier, on peut, sans froisser ni plier ni chiffonner ni déchirer, recoller une paire de côtés opposés et obtenir un cylindre. Pour recoller la deuxième paire de côtés opposés, qui sont maintenant les extrémités de ce cylindre, ce n'est pas aussi facile!

C'est là qu'on arrive à la courbure, et que ça devient plus dur.

4. Courbure. Il y a de la courbure positive en un point si les petits cercles centrés en ce point sont moins longs que les cercles de même rayon dans un plan. Il y a de la courbure négative s'ils sont plus longs. Montrer, avec les points coniques, qu'il n'y a pas toujours de plan tangent. Il peut être utile d'avoir des polydron (ou l'équivalent en carton) pour montrer des points coniques avec courbure totale nulle, positive, ou négative. Montrer d'abord des points singuliers, puis des points réguliers. Aux points lisses, si la surface est d'un seul côté (sphère) avec des petits cercles un peu trop courts ($2\pi \sin(r)$ au lieu de $2\pi r$, mais on ne donne par la formule), il y a courbure positive; si la surface rencontre le plan tangent suivant une droite en restant d'un seul côté (par exemple cylindre), il y a courbure nulle; si la surface traverse le plan tangent (selle de cheval), il y a courbure négative.

5. Surface de courbure constante: la sphère, la pseudosphère, le problème de l'existence d'une structure géométrique (un moyen de calculer les

longueurs) à courbure constante; faire «sentir» que sur le tore vu comme une bouée, on a à la fois de la courbure positive (au point le plus haut, la surface est entièrement d'un côté du plan tangent) et de la courbure négative (sur un cercle de gorge, la surface doit traverser le plan tangent). Est-ce que ça pourrait être de courbure nulle en moyenne, et est-ce qu'on peut trouver une structure où c'est nul partout?

6. Deux exemples abstraits de tore à courbure nulle:

- jeux vidéo où quand on sort de l'écran par un côté, on rentre par le côté opposé: on vit sur un tore
- billard rectangulaire: en partant dans une direction, la trajectoire peut se poursuivre dans quatre directions (obtenues par réflexion le long des côtés à partir de la direction de départ); on peut déplier le billard, et on obtient un tore.

Plus généralement, tout parallélogramme donne un tore, et ces tores sont distincts car ils n'ont pas les mêmes lignes droites fermées: montrer le tore carré et le tore hexagonal.

Le problème: peut-on physiquement réaliser ces tores plats dans l'espace? C'est impossible de façon «lisse»; on peut le faire de façon «fractale» (cf. Borrelli et al.), peut-on le faire en origami?

7. Les ploïdes: en montrer, en faire fabriquer, monter qu'un ploïde est un origami basé sur un parallélogramme dont on a recollé deux côtés opposés; montrer la famille de géodésiques fermées qui fait le tour du ploïde. (C'est aussi l'occasion de parler des hyperboloïdes comme surfaces réglées, et d'expliquer leur intérêt en architecture; on peut en réaliser facilement à partir de deux disques ou cercles en bois, et de fil. En général, ça plaît bien.)

8. Les diplotores: montrer qu'en recollant deux ploïdes bien choisis (par exemple deux ploïdes dont les polygones supports ne sont pas décalés, et dont un est à faces rectangulaires), on obtient un tore.

9. Faire réaliser physiquement un diplotore à partir de patrons fournis.

Attention! ça demande plusieurs choses:

- il faut que les patrons existent, et soient bien choisis, tant en dessin qu'en matériau (bristol de bonne qualité)
- il faut que les personnes responsables du stage se soient fortement entraînées, pour être sûres de pouvoir mettre en place les ploïdes.