

Les constantes de Kaprekar : corrections

La constante de Kaprekar à trois chiffres

a) En testant l'algorithme de *Kaprekar* avec d'autres nombres à trois chiffres, on obtient 495 à chaque fois.

⇒ On teste le nombre 381 :

❖ Étape ① : ❶ on forme 831 et ❷ 138, puis ❸ on retranche 138 de 831 : $831 - 138 = 693$.

❖ Étape ② : ❶ on forme 963 et ❷ 369, puis ❸ on retranche 369 de 963 : $963 - 369 = 594$.

❖ Étape ③ : ❶ on forme 954 et ❷ 459, puis ❸ on retranche 459 de 954 : $954 - 459 = 495$.

❖ Étape ④ : ❶ on forme 954 et ❷ 459, puis ❸ on retranche 459 de 954 : $954 - 459 = 495$.

❖ On s'arrête car on a obtenu deux fois de suite **495** aux étapes ③ et ④.

b) Vérifier qu'en choisissant 657, l'algorithme de *Kaprekar* renvoie 495 à la fin de la 5^e étape.

❖ Étape ① : ❶ on forme 765 et ❷ 567, puis ❸ on retranche 567 de 765 : $765 - 567 = 198$.

❖ Étape ② : ❶ on forme 981 et ❷ 189, puis ❸ on retranche 189 de 981 : $972 - 279 = 792$.

❖ Étape ③ : ❶ on forme 972 et ❷ 279, puis ❸ on retranche 279 de 972 : $972 - 279 = 693$.

❖ Étape ④ : ❶ on forme 963 et ❷ 369, puis ❸ on retranche 369 de 963 : $963 - 369 = 594$.

❖ Étape ⑤ : ❶ on forme 954 et ❷ 459, puis ❸ on retranche 459 de 954 : $954 - 459 = 495$.

❖ Étape ⑥ : ❶ on forme 954 et ❷ 459, puis ❸ on retranche 459 de 954 : $954 - 459 = 495$.

❖ On s'arrête car on a obtenu deux fois de suite **495** aux étapes ⑤ et ⑥.

c) Il existe des nombres à trois chiffres qui ne renvoient pas 495 par l'algorithme de *Kaprekar*.

⇒ On teste le nombre 111 :

❖ Étape ① : ❶ on forme 111 et ❷ 111, puis ❸ on retranche 111 de 111 : $111 - 111 = 0$.

On obtient 0 dès l'étape ①.

⇒ On teste le nombre 212 :

❖ Étape ① : ❶ on forme 221 et ❷ 122, puis ❸ on retranche 122 de 221 : $221 - 122 = 99$.

On obtient 99 dès l'étape ①.

La constante de Kaprekar à quatre chiffres

a) Tester l'algorithme de *Kaprekar* avec le nombre 7 286.

❖ Étape ① : ❶ on forme 8 762 et ❷ 2 678, puis ❸ on retranche 2 678 de 8 762 : $8\ 762 - 2\ 678 = 6\ 084$.

❖ Étape ② : ❶ on forme 8 640 et ❷ 0 468, puis ❸ on retranche 0 468 de 8 640 : $8\ 640 - 0\ 468 = 8\ 172$.

❖ Étape ③ : ❶ on forme 8 721 et ❷ 1 278, puis ❸ on retranche 1 278 de 8 721 : $8\ 721 - 1\ 278 = 7\ 443$.

❖ Étape ④ : ❶ on forme 7 443 et ❷ 3 447, puis ❸ on retranche 3 447 de 7 443 : $7\ 443 - 3\ 447 = 3\ 996$.

❖ Étape ⑤ : ❶ on forme 9 963 et ❷ 3 699, puis ❸ on retranche 3 699 de 9 963 : $9\ 963 - 3\ 699 = 6\ 264$.

❖ Étape ⑥ : ❶ on forme 6 642 et ❷ 2 466, puis ❸ on retranche 2 466 de 6 642 : $6\ 642 - 2\ 466 = 4\ 176$.

❖ Étape ⑦ : ❶ ❶ on forme 7 641 et ❷ 1 467, puis ❸ on retranche 1 467 de 7 641 : $7\ 641 - 1\ 467 = 6\ 174$.

❖ Étape ⑧ : ❶ on forme 7 641 et ❷ 1 467, puis ❸ on retranche 1 467 de 7 641 : $7\ 641 - 1\ 467 = 6\ 174$.

❖ On s'arrête car on a obtenu deux fois de suite **6 174** aux étapes ⑦ et ⑧.

b) Le résultat mène à la **constante de Kaprekar à 4 chiffres**. Que vaut-elle ? Combien faut-il d'étapes pour être certain de l'obtenir ?

Il faut au **maximum 7 étapes** pour obtenir le nombre **6 174** : ce point fixe est appelé la **constante de Kaprekar à 4 chiffres**.

c) Existe-t-il des cas dégénérés ?

⇒ On teste le nombre 1 111 :

❖ Étape ① : ❶ on forme 1 111 et ❷ 1 111, puis ❸ on retranche 1 111 de 1 111 : $1\ 111 - 1\ 111 = 0$.

On obtient 0 dès l'étape ①.

⇒ On teste le nombre 3 433 :

❖ Étape ① : ❶ on forme 4 333 et ❷ 3 334, puis ❸ on retranche 3 334 de 4 333 : $4\ 333 - 3\ 334 = 999$.

On obtient 999 dès l'étape ①.

Les nombres à exclure cités ci-dessus sont des **cas dégénérés**. On exclut les nombres composés **de quatre chiffres identiques** (comme 1 111, 2 222, 3 333...) et ceux qui **comportent trois chiffres égaux et le quatrième un voisin** (comme 1 112, 2 122, 2 232, 3 433...).