Les cercles de Rubik

Une initiation aux groupes de permutations

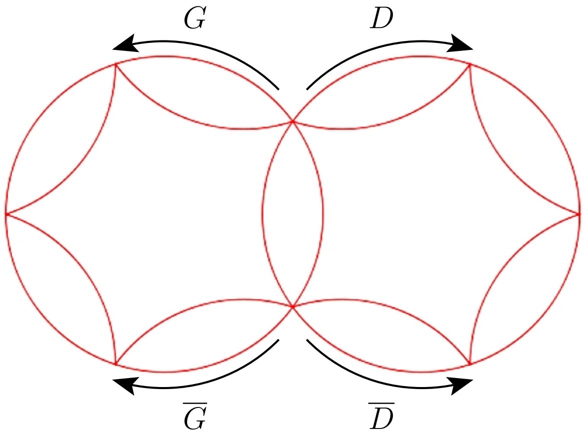
Les cercles de Rubik est un casse-tête simple composé de deux roues que l'on peut tourner. Chaque roue entraîne 5 pièces, une pièce étant commune aux deux roues pour permettre des échanges. On commence par monter le casse-tête en mettant chaque pièce à sa place. On mélange ensuite en tournant les deux roues comme on veut. Le but est ensuite de remettre le casse-tête dans sa situation de départ juste en agissant sur les deux roues.

Quelques faits :

- Les cercles de Rubik ont 181 440 configurations possibles.
- Si on place les pièces au hasard, on a une chance sur deux que le casse-tête ne soit pas résoluble.
- On peut résoudre toute position en moins de 17 coups et seules deux positions demandent ces 17 coups.
- On peut trouver une méthode de résolution en 10 minutes. Y arriverez-vous ?
- Si on choisit une suite de plusieurs mouvements, en répétant cette suite au plus 15 fois, on revient à la situation de départ.

Notations

Pour communiquer facilement, on va choisir des notations. On notera D, G, $\overline{D}$ et $\overline{G}$ les quatre mouvements élémentaires possibles comme ci-contre. Ainsi, l'instruction $D\overline{G}\,\overline{G}\,\overline{D}$ veut dire que l'on tourne la roue droite dans le sens des aiguilles d'une montre puis deux fois la roue gauche dans le sens des aiguilles d'une montre et enfin une fois la droite dans le sens inverse des aiguilles. On notera aussi id le mouvement qui consiste à ne rien faire.

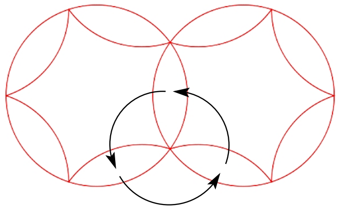


Echauffements

Que vaut $G^5 = G\,G\,G\,G\,G$? Que fait $D^4 = D\,D\,D\,D$?
Est-ce que $G\,D = D\,G$?
Vérifier que $G\,\overline{G} = id$. On dit que G et $\overline{G}$ sont inverses l'un de l'autre. Quel est l'inverse de la suite de mouvements $G\,G\,D\,\overline{G}\,D\,G\,\overline{D}$, c'est-à-dire quelle suite de mouvements faut-il faire pour revenir au point de départ ? De manière générale, comment trouver l'inverse d'une suite de mouvements ?

Les commutateurs

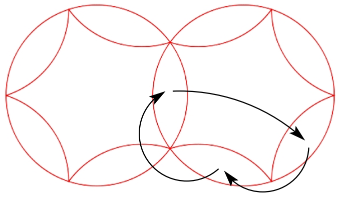
Pour résoudre le casse-tête, il est utile de trouver des séquences qui ne bougent que très peu de pièces. Ainsi, on ne bouge pas les pièces qui sont déjà à leur place. Essayons le mouvement $D\,G\,\overline{D}\,\overline{G}$: on s'aperçoit qu'il ne change de place que trois pièces comme dans la figure ci-contre. Ce mouvement a une structure particulière du type $AB\overline{AB}$ avec A et B deux mouvements donnés : on parle de *commutateur*. Trouvez d'autres commutateurs et regarder comment ils agissent sur les pièces.



L'action du commutateur $D\,G\,\overline{D}\,\overline{G}$ sur les pièces.

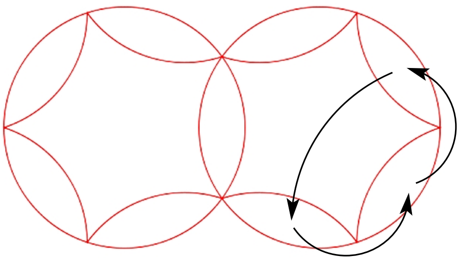
Les conjugaisons

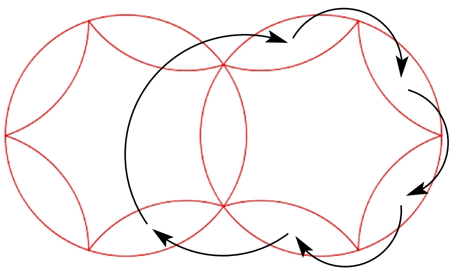
Imaginons maintenant que l'on veut échanger de place trois pièces comme ci-contre. On peut procéder ainsi. On utilise le mouvement $\overline{G}\,D$ qui amène les trois pièces concernées dans la zone où le commutateur $D\,G\,\overline{D}\,\overline{G}$ agit. On effectue ce commutateur puis on revient en arrière en faisant le mouvement inverse $\overline{D}\,G$. On a donc construit un mouvement $\overline{G}\,D\,D\,G\,\overline{D}\,\overline{G}\,\overline{D}\,G$ qui échange les trois pièces comme ci-contre. La structure de cette suite est $AB\overline{A}$ avec A et B deux mouvements donnés : on parle de *conjugaison*.



L'action du mouvement $\overline{G}\,D\,D\,G\,\overline{D}\,\overline{G}\,\overline{D}\,G$ sur les pièces.

Inspirez-vous de cette structure en conjugaison pour agir sur les pièces comme ci-dessous.





A partir de maintenant, on a assez de matériel pour trouver une méthode de résolution.

Pouvez-vous en proposer une ?

Des formules du vrai Rubik's Cube

Le vrai Rubik's Cube possède 12 mouvements élémentaires (en plus de la face droite et gauche, on peut aussi tourner le haut, le bas, l'avant et l'arrière). Pour résoudre le Rubik's Cube, il faut apprendre des suites de mouvements qui ont des actions simples sans changer toutes les pièces déjà en place. Ces suites sont souvent basées sur les principes des commutateurs et des conjugaisons. Dans les suites ci-dessous, repérez les commutateurs et conjugaisons que vous voyez.

Tourner un cube-arête vers la droite	$H\,D\,\overline{H}\,\overline{D}\,H\,A\,\overline{H}\,\overline{A}$
Permuter des cubes-arêtes pour la croix finale	$\overline{D}\,\overline{H}\,\overline{A}\,H\,A\,D$
Orienter des cubes-arêtes	$D\,H\,H\,\overline{D}\,\overline{H}\,D\,\overline{H}\,\overline{D}$
Tourner trois cubes-coins	$\overline{G}\,H\,D\,\overline{H}\,G\,H\,\overline{D}\,\overline{H}$

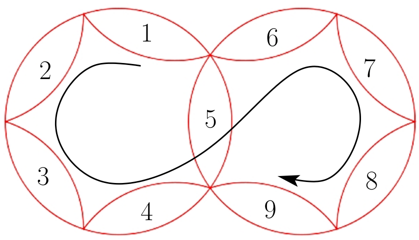
Les cycles

Le commutateur $\overline{D}\,\overline{G}\,D\,G$ ne fait rien d'autre que permuter les trois pièces du centre en haut. Son action est donc un cycle dont chaque pièce se déplace d'un cran à chaque fois qu'on applique la séquence. Si on applique la séquence trois fois de suite, tout le monde a fait un tour et on revient à la situation de départ, c'est-à-dire que $(\overline{D}\,\overline{G}\,D\,G)^3 = id$. De même, si on tourne simplement la roue droite D, alors on fait avancer d'un cran des pièces dans un cycle de cinq éléments. Si on applique cinq fois de suite l'action D, alors on se retrouve au point de départ.

Quelle est la longueur du cycle correspondant à l'action $D\,G$? Pouvez-vous prévoir combien de fois de suite il faut appliquer l'opération $D\,G$ pour revenir au départ ? Pouvez-vous trouver une suite de mouvements qu'il faut appliquer 15 fois de suite pour revenir au point de départ ?

Des situations non-résolubles

Pour simplifier l'écriture, on va appeler les pièces suivant la numérotation ci-contre. Ainsi, la position de départ est la position 123456789, si on applique la rotation G, on obtient la position 512346789 et si on applique ensuite D, on obtient la position 512394678 etc. Nous allons maintenant introduire la *signature* de la position. Pour une situation donnée, on fait la liste des couples mal-ordonnés.



Situation :	321456789	512394678
Couples mal-ordonnés :	3-2, 3-1, 2-1	5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 9-4, 9-6, 9-7, 9-7
Nombre de couples mal-ordonnés :	3	8

Si le nombre de couples mal-ordonnés est paire (ou impaire), on dit que la signature de la position est paire (ou impaire). On peut vérifier à la main la propriété suivante : tourner une des roues ne change pas la signature de la position. Ainsi, la position de départ ayant une signature paire, on ne peut réaliser que des situations avec signature paire. A l'inverse, si on part d'une position avec une signature impaire, par exemple en inversant de place deux pièces, alors on ne pourra pas revenir à la situation de départ. On a ainsi prouvé qu'il existe des positions non-résolubles !