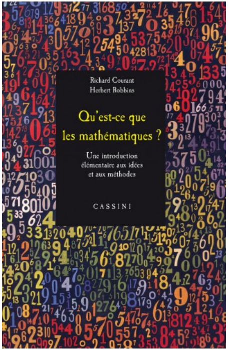
Introduction : deux questions simples (?)

1. Qu'est-ce que les mathématiques ?
2. Qu'est-ce qui motive les progrès en mathématiques ?

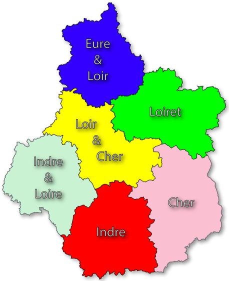
Introduction : deux questions simples (?)

1. Qu'est-ce que les mathématiques ?
2. Qu'est-ce qui motive les progrès en mathématiques ?

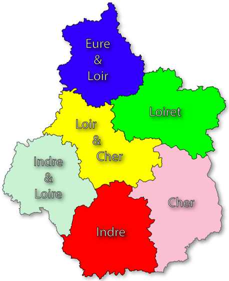


Richard Courant & Herbert Robbins, 1941.
Traduction française , ed. Cassini, 2018.

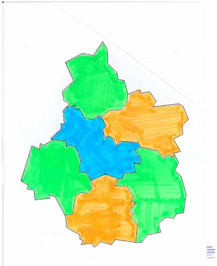
Combien faut-il de couleurs pour colorier une carte ?



Combien faut-il de couleurs pour colorier une carte ?

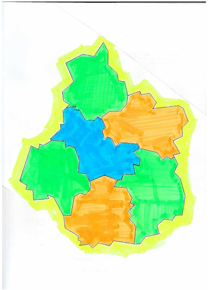


Certes, mais ici trois couleurs auraient suffi :



Combien faut-il de couleurs pour colorier une carte ?

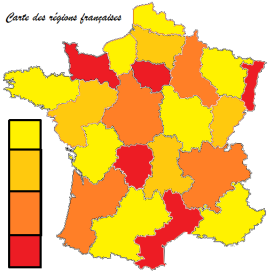
En fait, j'ai utilisé 4 couleurs :



Et je ne peux pas faire moins !

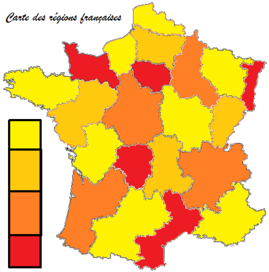
Combien faut-il de couleurs pour colorier une carte ?

Un autre exemple familier :



Combien faut-il de couleurs pour colorier une carte ?

Un autre exemple familier :



Exercice 1 : colorier la carte des (anciennes) régions de France avec 4 couleurs et de façon à ce qu'une des couleurs n'apparaisse dans aucune une région périphérique.
Exercice 2 : se convaincre que cette question de coloriage de cartes est identique pour une carte plane et une carte sphérique.

Combien faut-il de couleurs pour colorier une carte ?

De très nombreuses tentatives sur de nombreux exemples semblent montrer que l'on peut colorier toute carte de géographie politique avec quatre couleurs.
Francis Guthrie est le premier à avoir énoncé cette question, alors qu'il était étudiant à Londres en 1852. Cette question a fasciné plusieurs générations de mathématiciens, professionnels et amateurs.

Combien faut-il de couleurs pour colorier une carte ?

De très nombreuses tentatives sur de nombreux exemples semblent montrer que l'on peut colorier toute carte de géographie politique avec quatre couleurs.
Francis Guthrie est le premier à avoir énoncé cette question, alors qu'il était étudiant à Londres en 1852. Cette question a fasciné plusieurs générations de mathématiciens, professionnels et amateurs.

Conjecture

Toute carte de géographie politique peut être coloriée avec 4 couleurs, de façon que deux territoires ayant une frontière commune ne soient jamais de la même couleur.

Cette conjecture a tenu pendant 120 ans, malgré les publications de plusieurs démonstrations à la fin du 19ème siècle : elles se sont révélées fausses !

Combien faut-il de couleurs pour colorier une carte ?

Théorème

Toute carte de géographie politique peut être coloriée avec 4 couleurs, de façon que deux territoires ayant une frontière commune ne soient jamais de la même couleur.

Kenneth Appel et Wolfgang Haken, 1976.
Article de 130 pages publié dans *Illinois Journal of Mathematics, 1977.*
Première démonstration *assistée par ordinateur* de l'histoire.

Combien faut-il de couleurs pour colorier une carte ?

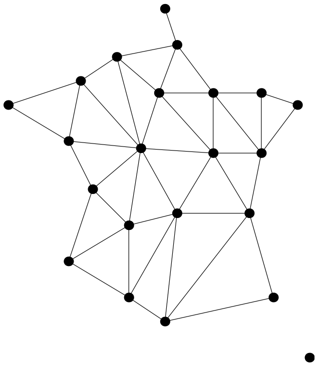
Théorème

Toute carte de géographie politique peut être coloriée avec 4 couleurs, de façon que deux territoires ayant une frontière commune ne soient jamais de la même couleur.

Kenneth Appel et Wolfgang Haken, 1976.
Article de 130 pages publié dans *Illinois Journal of Mathematics, 1977.*
Première démonstration *assistée par ordinateur* de l'histoire.

La question posée ne relève pas de la *géométrie*, mais de la *topologie* car des déformations souples et sans déchirure ne changent rien à la question. En fait c'est un problème de *théorie des graphes*.

Le graphe des (anciennes) régions françaises



Qu'est-ce qu'un graphe ?

Un graphe est "un objet mathématique abstrait" défini par
un ensemble de **sommets** $S = \{a, b, c, d, e, \dots\}$
et un ensemble d'**arêtes** A.
Une arête est une paire de sommets distincts, sans tenir compte de leur ordre.
Si b et e sont deux sommets du graphe et si (b, e) est une arête du graphe, on dit que b et e sont les **extrémités** de l'arête (b, e).

Qu'est-ce qu'un graphe ?

Un graphe est "un objet mathématique abstrait" défini par
un ensemble de **sommets** $S = \{a, b, c, d, e, \dots\}$
et un ensemble d'**arêtes** A.
Une arête est une paire de sommets distincts, sans tenir compte de leur ordre.
Si b et e sont deux sommets du graphe et si (b, e) est une arête du graphe, on dit que b et e sont les **extrémités** de l'arête (b, e).
Exemples :

- le graphe dont les sommets sont les gares SNCF et le arêtes sont les paires de gares qui peuvent être reliées sans passer par une autre gare.
- le graphe dont les sommets sont les professeurs du collège et les arêtes sont les paires de professeurs intervenant devant une même classe.

Graphe associé à une carte de géographie politique

Une carte de géographie politique est la représentation d'un certain nombre de territoires. On peut lui associer un graphe dont les sommets sont les territoires et les arêtes sont les paires de territoires ayant une frontière en commun. Exemple :

$$S = \{\text{Allemagne } (a), \text{ Belgique } (b), \text{ Espagne } (e), \text{ France } (f), \\ \text{Hongrie } (h), \text{ Italie } (i), \text{ Portugal } (p), \text{ Suisse}(s)\},$$

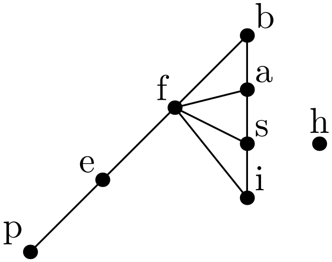
$$A = \{(a,b),(a,f),(a,s),(b,f),(e,f),(e,p),(f,i),(f,s),(i,s)\}.$$

Représentation d'un graphe

Un graphe sera décrit par un certain nombre de points représentant les sommets et des lignes représentant les arêtes.

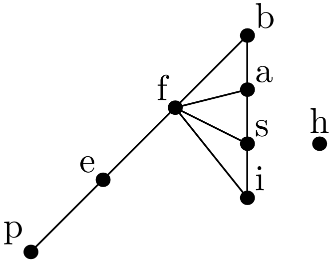
Représentation d'un graphe

Un graphe sera décrit par un certain nombre de points représentant les sommets et des lignes représentant les arêtes.

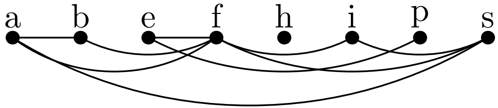


Représentation d'un graphe

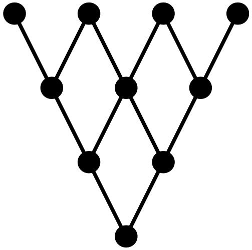
Un graphe sera décrit par un certain nombre de points représentant les sommets et des lignes représentant les arêtes.

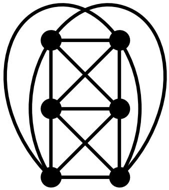


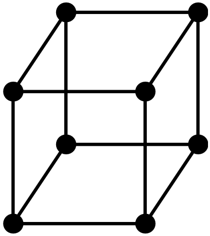
Le même graphe :



Autres exemples de graphes



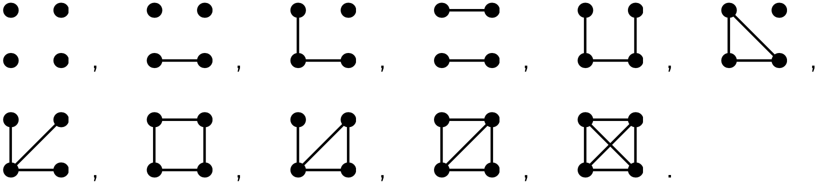




Vu précédemment : le graphe des anciennes régions françaises.

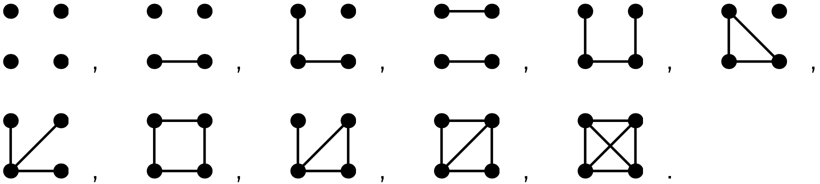
Il y a beaucoup de graphes !

Combien existe-t-il de graphes différents avec 4 sommets ?
Il y en a onze à permutation près des sommets :



Il y a beaucoup de graphes !

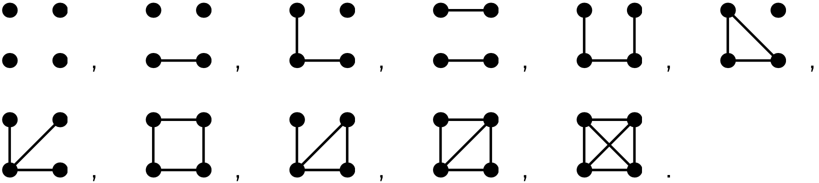
Combien existe-t-il de graphes différents avec 4 sommets ?
Il y en a onze à permutation près des sommets :



Mais il y a plus de 1000 graphes sur 7 sommets,
et plus de 12 millions de graphes sur 10 sommets !

Il y a beaucoup de graphes !

Combien existe-t-il de graphes différents avec 4 sommets ?
Il y en a onze à permutation près des sommets :



Mais il y a plus de 1000 graphes sur 7 sommets,
et plus de 12 millions de graphes sur 10 sommets !

Une minoration grossière du nombre de graphes différents sur n sommets est $\dfrac{1}{n!}2^{n(n-1)/2}$.

Colorier les graphes

Définition

On appelle **coloriage** *du graphe* (S, A) *l'attribution d'une couleur à chaque sommet du graphe de façon que deux sommets reliés par une arête ne soient jamais de la même couleur.*

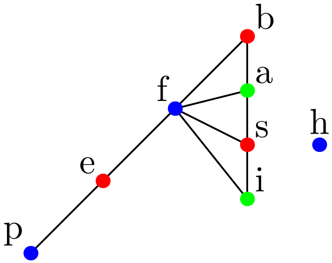
Colorier les graphes

Définition

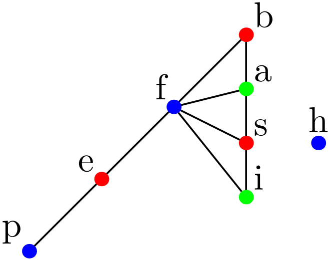
On appelle **coloriage** *du graphe* (S, A) *l'attribution d'une couleur à chaque sommet du graphe de façon que deux sommets reliés par une arête ne soient jamais de la même couleur.*

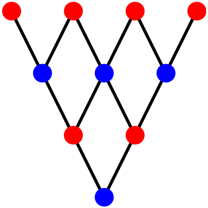
Il suffit bien sûr d'attribuer une couleur différente à chaque sommet du graphe ! Mais notre objectif sera d'utiliser peu de couleurs différentes, et si possible un minimum.

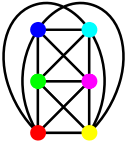
Colorier les graphes - Exemples

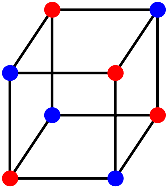


Colorier les graphes - Exemples









Colorier les graphes - À quoi ça sert ?

Organisation du travail : vous avez une liste d'actions à réaliser, et certaines paires d'actions ne peuvent pas être réalisées simultanément.
Par exemple vous êtes le principal du collège et vous préparez les emplois du temps : un même professeur ne peut pas être devant deux classes différentes au même moment.
Autre exemple : un central téléphonique doit gérer des appels ; deux appels issus du même poste ou arrivant au même poste sont incompatibles.

Colorier les graphes - À quoi ça sert ?

Organisation du travail : vous avez une liste d'actions à réaliser, et certaines paires d'actions ne peuvent pas être réalisées simultanément.
Par exemple vous êtes le principal du collège et vous préparez les emplois du temps : un même professeur ne peut pas être devant deux classes différentes au même moment.
Autre exemple : un central téléphonique doit gérer des appels ; deux appels issus du même poste ou arrivant au même poste sont incompatibles.

Considérez le graphe dont les sommets sont les actions et dont les arêtes relient les actions incompatibles. Coloriez ce graphe, vous décrirez une organisation possible des actions à réaliser. Moins il y aura de couleurs, meilleure sera l'organisation.

Les graphes connexes

Définition

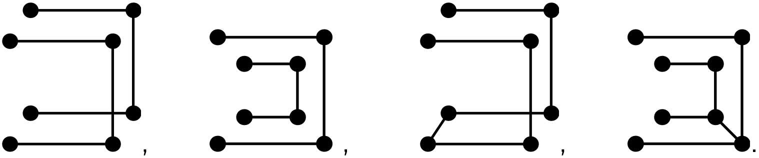
Un **graphe connexe** *est un graphe dans lequel toute sommet peut être relié à tout autre sommet en suivant une succession d'arêtes.*

Les graphes connexes

Définition

Un **graphe connexe** *est un graphe dans lequel toute sommet peut être relié à tout autre sommet en suivant une succession d'arêtes.*

Exemple : parmi les 4 graphes suivants, les deux premiers sont (identiques et) non connexes, les deux derniers sont (différents et) connexes.



Les graphes plans

Définition

Un graphe plan est un graphe qui peut être représenté sans croisement d'arêtes.

Les graphes plans

Définition

Un graphe plan est un graphe qui peut être représenté sans croisement d'arêtes.

Exemples : le graphe complet sur 4 sommets est plan :

$=$

Les graphes plans

Le graphe “cube" est un graphe plan :

Les graphes plans

Le graphe “cube" est un graphe plan : $=$

Les graphes plans

Le graphe “cube" est un graphe plan : $\quad =$

Le graphe complet sur 5 sommets n’est pas un graphe plan :

Les graphes plans

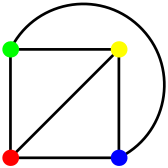
Le graphe “cube" est un graphe plan : $=$

Le graphe complet sur 5 sommets n’est pas un graphe plan :

Voici un autre exemple célèbre de graphe qui n’est pas plan :

Coloriage des graphes plans

Il faut bien sûr exactement **4** couleurs pour colorier le graphe complet sur 4 sommets :



C'est le cas du graphe associé aux quatre pays :

Allemagne, Belgique, France et Luxembourg.

Théorème des quatre couleurs

Théorème

Tout graphe plan peut être colorié avec 4 couleurs.

Théorème des quatre couleurs

Théorème

Tout graphe plan peut être colorié avec 4 couleurs.

Beaucoup trop difficile pour même esquisser ici une démonstration !

Mais montrer que 6 couleurs suffisent toujours est assez facile, et une démonstration du fait que 5 couleurs suffisent est à la portée de lycéens concentrés.

La formule d'Euler (1750).

Pour tout graphe plan connexe, on a la formule suivante :

nombre de sommets – nombre d'arêtes $+$ **nombres de zones** $= 2$.

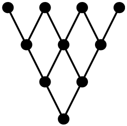
Pour tout graphe plan connexe, on a la formule suivante :

nombre de sommets – nombre d'arêtes $+$ **nombres de zones** $= 2$**.**

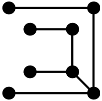
Pour tout graphe plan connexe, on a la formule suivante :

nombre de sommets − nombre d'arêtes + nombres de zones $= 2$**.**

Exemples :

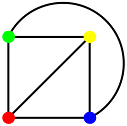


, $10 - 12 + 4 = 2.$



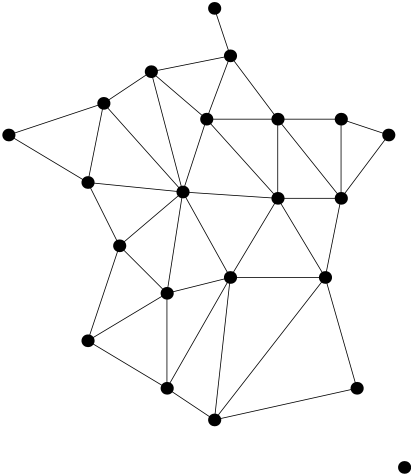
, $8 - 7 + 1 = 2.$

, $8 - 12 + 6 = 2.$



, $4 - 6 + 4 = 2.$

La formule d'Euler (1750).

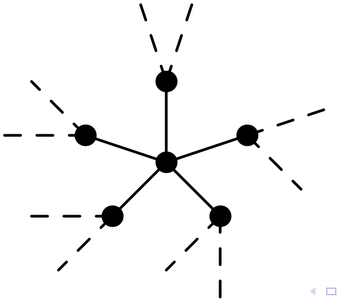


21-43+24=2.

Démonstration du théorème des 6 couleurs

De la formule d'Euler, et avec un peu de travail, on déduit que dans tout graphe plan, il existe un sommet qui a au plus 5 voisins directs.

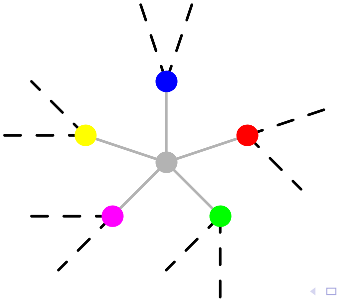
Nous raisonnons par récurrence sur le nombre de sommets. On identifie un sommet s ayant au plus 5 voisins, on oublie ce sommet s. On colorie le graphe privé de s avec au plus 6 couleurs. On réintroduit le sommet s et une des 6 couleurs est disponible pour lui.



Démonstration du théorème des 6 couleurs

De la formule d'Euler, et avec un peu de travail, on déduit que dans tout graphe plan, il existe un sommet qui a au plus 5 voisins directs.

Nous raisonnons par récurrence sur le nombre de sommets. On identifie un sommet s ayant au plus 5 voisins, on oublie ce sommet s. On colorie le graphe privé de s avec au plus 6 couleurs. On réintroduit le sommet s et une des 6 couleurs est disponible pour lui.



La formule d'Euler (1750).

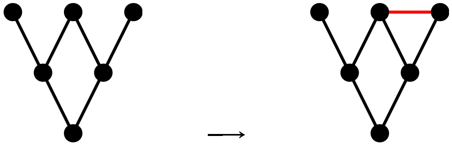
$$\mathbf{S - A + Z = 2.}$$

Démonstration :
Si le graphe est constitué d'un seul sommet, il n'y a pas d'arête et la formule est *triviale* : $1 - 0 + 1 = 2$.
Tout graphe peut être construit à partir d'un seul sommet, en ajoutant successivement des arêtes (et les sommets associés).

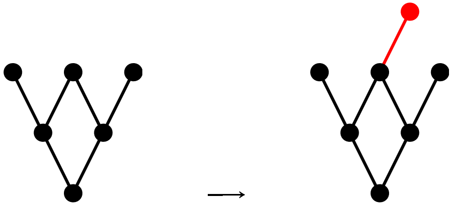
- Si on ajoute une arête entre deux sommets existants, alors on ajoute une zone car on ferme une boucle. Le nombre S ne change pas, les nombres A et Z augmentent d'une unité.
- Si on ajoute une arête avec un nouveau sommet, c'est S qui augmente et Z qui ne change pas.

Dans tous les cas la formule $S - A + Z = 2$ est préservée tout au long de la construction.

Nouvelle arête sans nouveau sommet ⟶ nouvelle zone :



Nouvelle arête avec nouveau sommet ⟶ pas de nouvelle zone :



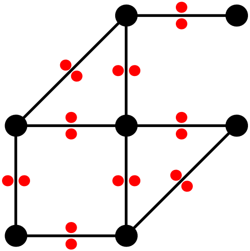
Une autre formule utile

2× nombre d'arêtes ≥ 3× nombre de zones.

Une autre formule utile

2× nombre d'arêtes ≥ 3× nombre de zones.

La démonstration peut être dessinée :



nombre de points rouges = 2× nombre d'arêtes,
nombre de points rouges ≥ 3× nombre de zones.

Le théorème des 6 couleurs

Le fait que tout graphe plan puisse être colorié **avec 6 couleurs** est une conséquence directe du fait suivant.

Théorème

Dans tout graphe plan, il existe au moins un sommet qui est associé à 5 arêtes ou moins.

Le théorème des 6 couleurs

Le fait que tout graphe plan puisse être colorié **avec 6 couleurs** est une conséquence directe du fait suivant.

Théorème

Dans tout graphe plan, il existe au moins un sommet qui est associé à 5 arêtes ou moins.

La démonstration est basée sur un petit peu d'algèbre.
On sait que $S - A + Z = 2$ et $2A \geq 3Z$.

Le théorème des 6 couleurs

Le fait que tout graphe plan puisse être colorié **avec 6 couleurs** est une conséquence directe du fait suivant.

Théorème

Dans tout graphe plan, il existe au moins un sommet qui est associé à 5 arêtes ou moins.

La démonstration est basée sur un petit peu d'algèbre.
On sait que $S - A + Z = 2$ et $2A \geq 3Z$.
On a $Z = 2 - S + A$ donc $3Z = 6 - 3S + 3A$.

Le théorème des 6 couleurs

Le fait que tout graphe plan puisse être colorié **avec 6 couleurs** est une conséquence directe du fait suivant.

Théorème

Dans tout graphe plan, il existe au moins un sommet qui est associé à 5 arêtes ou moins.

La démonstration est basée sur un petit peu d'algèbre.
On sait que $S - A + Z = 2$ et $2A \geq 3Z$.
On a $Z = 2 - S + A$ donc $3Z = 6 - 3S + 3A$.
D'où $2A \geq 6 - 3S + 3A$ c'est-à-dire $3S \geq 6 + A$.

Le théorème des 6 couleurs

Le fait que tout graphe plan puisse être colorié **avec 6 couleurs** est une conséquence directe du fait suivant.

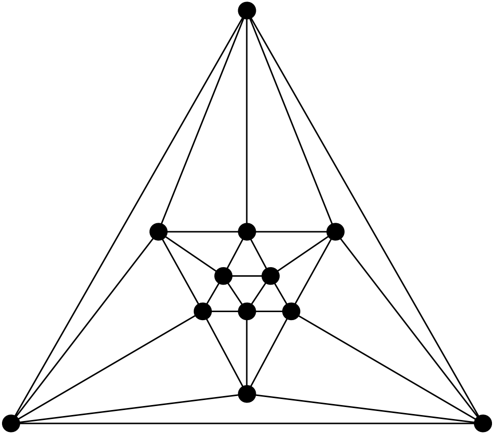
Théorème

Dans tout graphe plan, il existe au moins un sommet qui est associé à 5 arêtes ou moins.

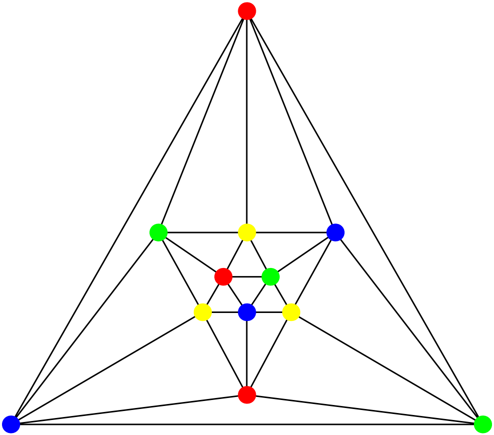
La démonstration est basée sur un petit peu d'algèbre.
On sait que $S - A + Z = 2$ et $2A \geq 3Z$.
On a $Z = 2 - S + A$ donc $3Z = 6 - 3S + 3A$.
D'où $2A \geq 6 - 3S + 3A$ c'est-à-dire $3S \geq 6 + A$.

Or, si tout sommet est attaché à au moins 6 arêtes, alors $6S \leq 2A$, c'est-à-dire $3S \leq A$.

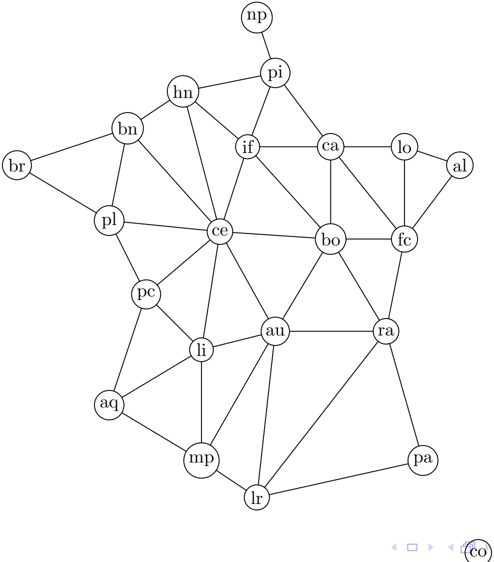
Un graphe plan dans lequel chaque sommet a exactement 5 voisins.



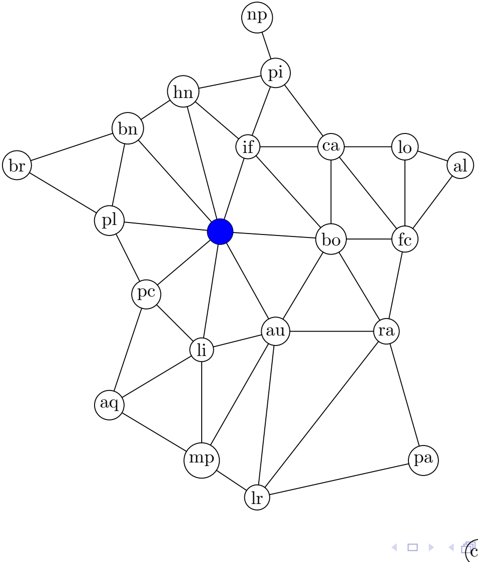
Le même en couleurs.



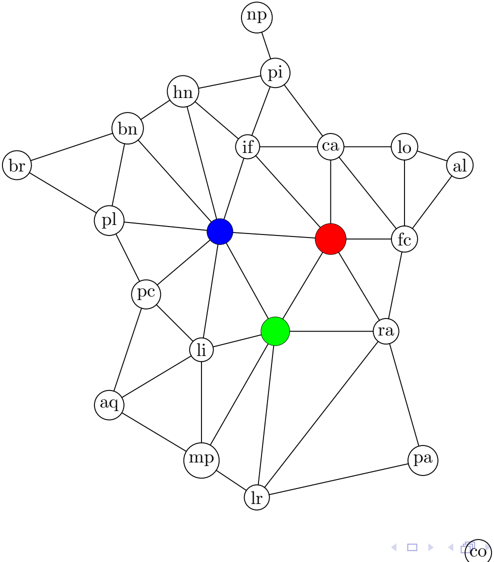
Coloriage de la carte des régions.



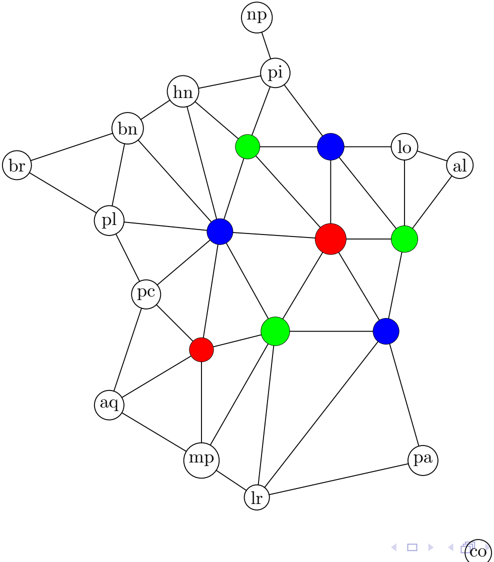
Régions à 8 voisins



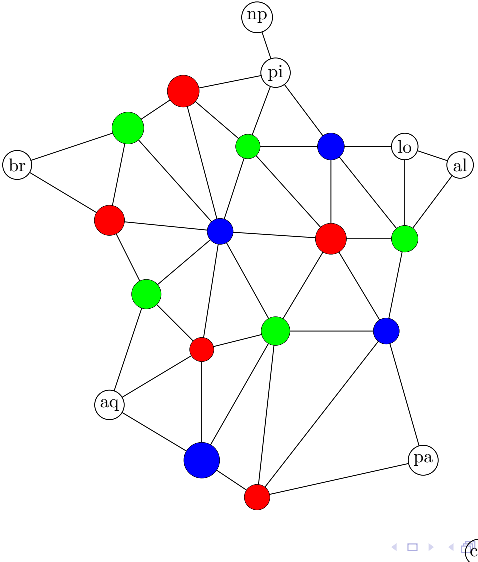
Régions à 6 voisins



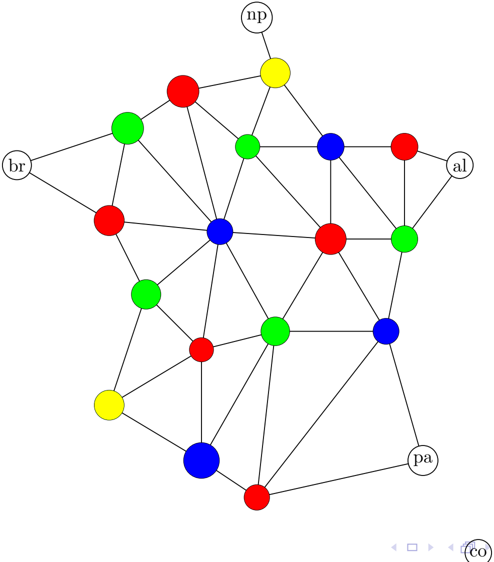
Régions à 5 voisins



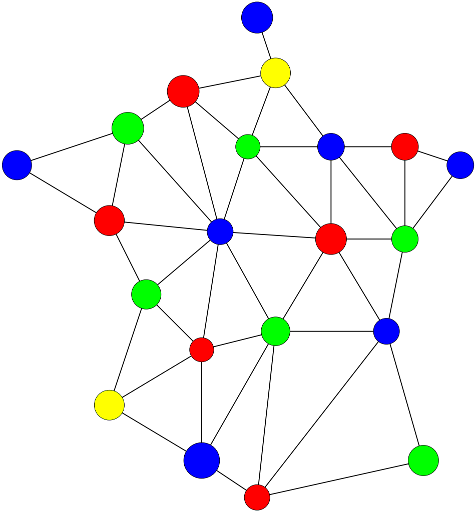
Régions à 4 voisins



Régions à 3 voisins

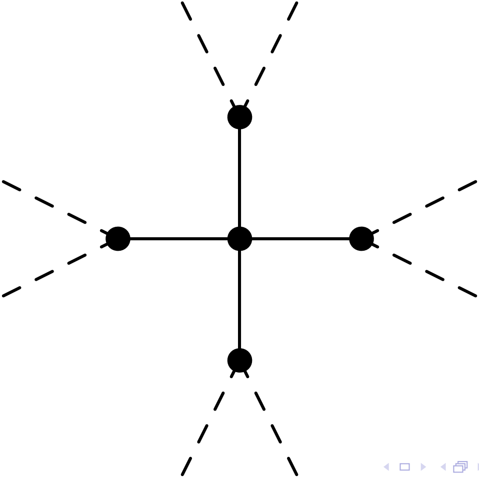


Régions à 2 ou 3 voisins



Une démonstration du théorème des 5 couleurs

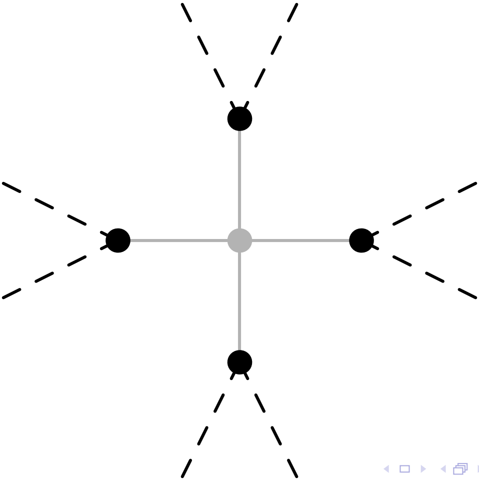
Nous raisonnerons par récurrence sur le nombre de sommets.
1er cas. Je trouve un sommet ayant strictement moins de 5 voisins.



Une démonstration du théorème des 5 couleurs

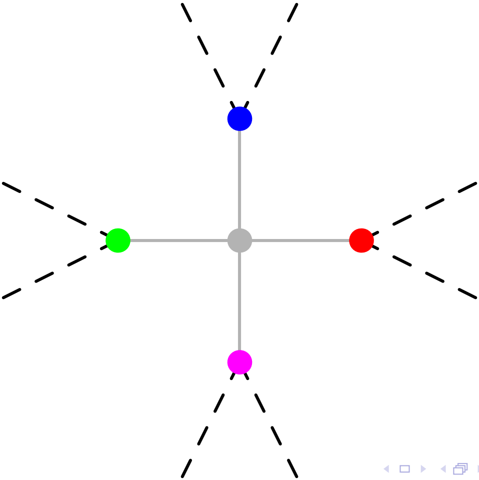
Nous raisonnerons par récurrence sur le nombre de sommets.

1er cas. Je trouve un sommet ayant strictement moins de 5 voisins.



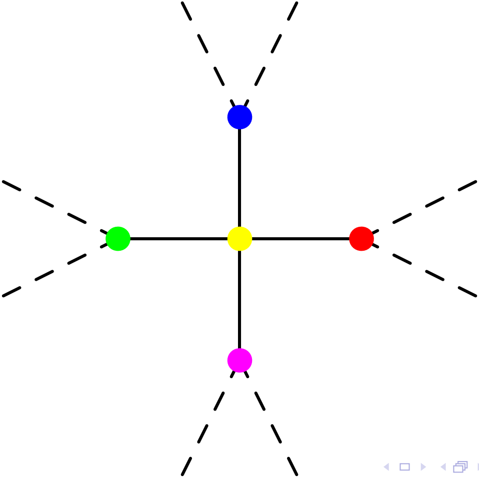
Une démonstration du théorème des 5 couleurs

Nous raisonnerons par récurrence sur le nombre de sommets.
1er cas. Je trouve un sommet ayant strictement moins de 5 voisins.



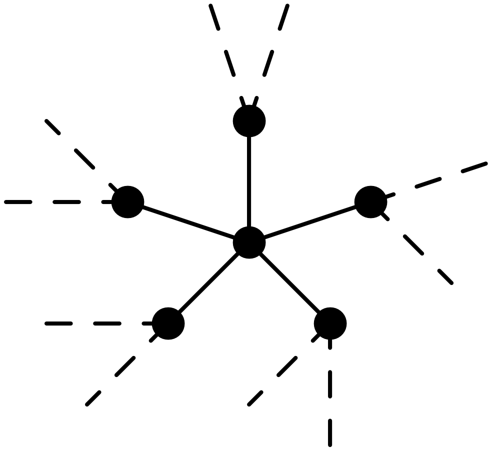
Une démonstration du théorème des 5 couleurs

Nous raisonnerons par récurrence sur le nombre de sommets.
1er cas. Je trouve un sommet ayant strictement moins de 5 voisins.



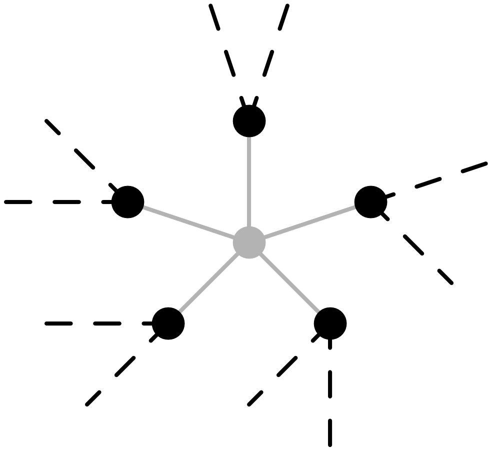
Une démonstration du théorème des 5 couleurs

2nd cas. Je sélectionne un sommet ayant 5 voisins.



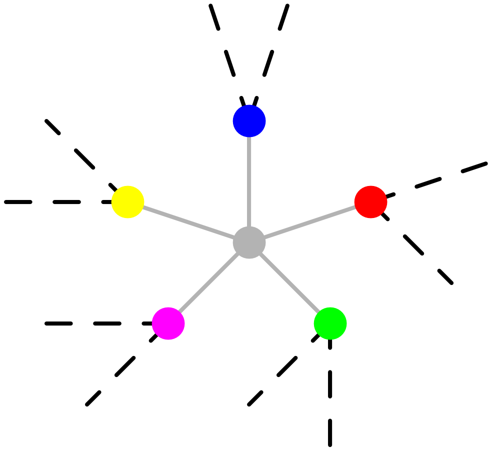
Une démonstration du théorème des 5 couleurs

2nd cas. Je sélectionne un sommet ayant 5 voisins.

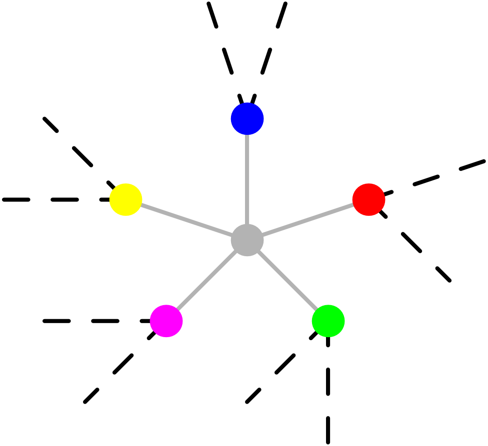


Une démonstration du théorème des 5 couleurs

2nd cas. Je sélectionne un sommet ayant 5 voisins.



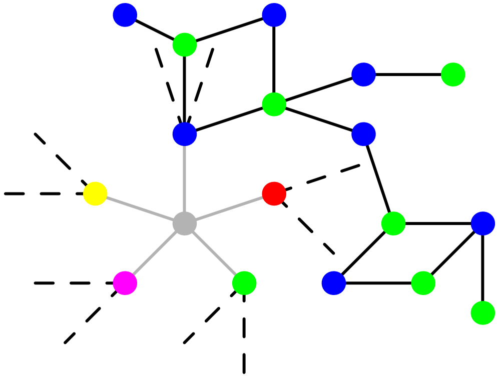
Une démonstration du théorème des 5 couleurs



Si je vois moins de 5 couleurs autour du sommet gris, c'est fini. Sinon je relève le graphe bleu et vert maximal attaché au sommet bleu.

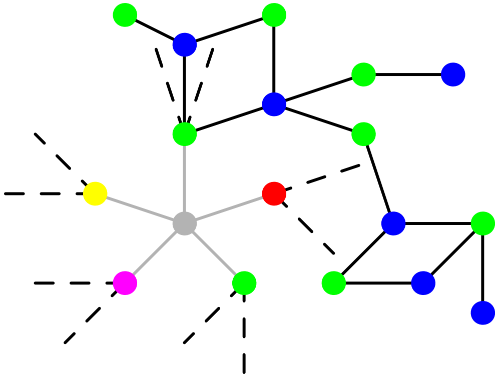
Une démonstration du théorème des 5 couleurs

1er sous-cas.



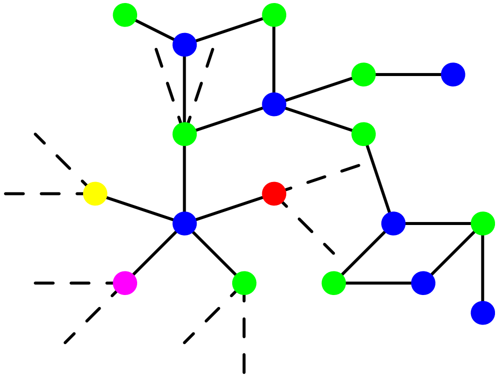
Une démonstration du théorème des 5 couleurs

1er sous-cas.



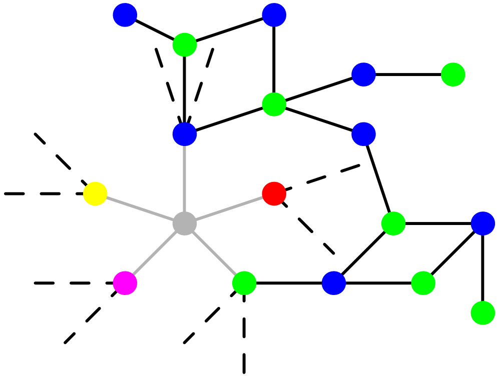
Une démonstration du théorème des 5 couleurs

1er sous-cas.



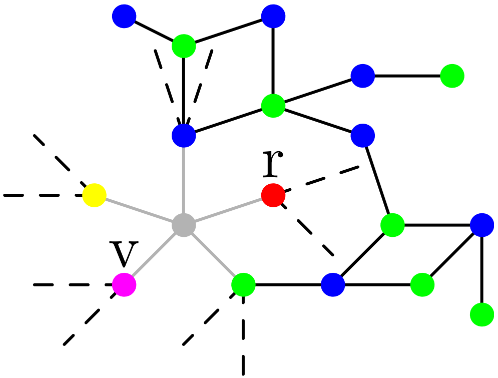
Une démonstration du théorème des 5 couleurs

2nd sous-cas.



Une démonstration du théorème des 5 couleurs

2nd sous-cas. Mais alors le graphe rouge et violet maximal attaché au sommet r ne contient pas le sommet v, et on peut faire la manipulation du 1er sous-cas.



FIN.